ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Faggruppen for filosofi og videnskabsteori

ROSKILDE UNIVERSITY CENTRE
Section for philosophy and science studies

Lasciti sotto-scientifici alla matematica d'abbaco: quasi-algebra ed altre strane specie

JENS HØYRUP

FILOSOFI OG VIDENSKABSTEORI PÅ ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

3. Række: Preprints og reprints

1997 Nr. 2

Lasciti sotto-scientifici alla matematica d'abbaco: quasi-algebra ed altre strane specie

Jens Høyrup

Non è necessario spiegare in un contesto italiano l'importanza della matematica pratica per la storia della matematica;* anzi, il lavoro dei colleghi italiani è una delle fonti più importanti del mio interesse per chiarire l'intreccio fra sviluppo teorico e attività pratica nell'epoca pre-moderna. Senza dubbio anche la mia esperienza di giovane docente di fisica per studenti di ingegneria civile fa parte della mia ispirazione (un'osservazione che forse appartiene alla psicoanalisi dello studioso; almeno al suo aspetto pubblicamente confessabile). Credo che non dimenticherò mai, né lo sforzo che occorreva per dare al mio sapere di teorico una forma che potesse entrare in dialogo con il sapere, i bisogni professionali e la motivazione di studenti che volevano calcolare soltanto quando bisognava (e serviva) veramente calcolare; ho imparato ancora di più dalla resistenza di certi colleghi a cui i miei tentativi di dialogo fra tipi di sapere appariva un'estremismo pericolosissimo e scandaloso (estremismo di sinistra, è ovvio – si era nei primi anni settanta).

Sarebbero trascorsi 15 anni da allora fino al momento in cui il rapporto tra i vari tipi di sapere mi apparisse abbastanza chiaro. Nel 1984 parlavo ancora del sapere dei pratici come «sapere popolare» («folk knowledge»);[1] solo quando ho cercato di capire la relazione fra la scienza del mondo medioevale islamico e le sue fonti è cominciata a precipitare la nozione di «sapere sotto-scientifico». Nel seguito intendo inizialmente presentare questa nozione,[2] avvicinandomi ad essa in modo indiretto, cioè attraverso

---

* La prima versione di questo saggio fu presentato al Seminario Matematico dell'Università di Siena il 10 gennaio 1997. Sfrutto l'occasione per ringraziare Laura Toti Rigatelli e Raffaella Franci per l'invito. Ringrazio anche Rossana Tazzioli per la correzione linguistica. Chiunque abbia cercato di correggere il testo di un altro sa che chi scrive resta il solo responsabile di eventuali errori.

[1] [Høyrup 1984: 7 e seg.].

[2] Un primo sviluppo sistematico viene presentato in [Høyrup 1990a]. Una presentazione più concisa ma più maturata, a cui la prima parte del saggio presente è assai vicina, è in [Høyrup 1997].

la matematica detta «di ricreazione» – un genere di matematica che nella sua origine era tutt'altro che una ricreazione innocua, anzi era da considerarsi un aspetto essenziale e caratteristico del sapere matematico di tipo «sotto-scientifico».

È noto che la distribuzione geografica dei «problemi di ricreazione» non rispetta i limiti generalmente validi fra culture matematiche distinte – come le fiabe, essi sono distribuiti «fra l'Irlanda e l'India»,[3] e si ritrovano persino in Cina.

La consueta conclusione è che questa distribuzione rifletta «arcivecchi rapporti culturali fra civiltà orientali ed occidentali».[4] Non c'è dubbio che questa conclusione sia giusta, ma non è per nulla sufficiente. Che precisamente *questi* problemi riflettano rapporti che sono molto meno vistosi in altre fonti (ivi comprese le fonti matematiche) si spiega soltanto attraverso le caratteristiche particolari dei vari tipi di attività matematica; al stesso tempo ciò mette in rilievo la nozione stessa di «culture matematiche» distinte.

I «problemi di ricreazione» sono «puri» nel senso che non trattano di vere applicazioni pratiche del sapere matematico, anche se parlano nell'idioma dell'uso quotidiano del calcolo:

> Sonno due chonpangni che ànno 8 uncie di balsimo in una anpolla che tiene 8 uncie e uolemo parttire questo balsimo chon due anpolle che ll'una tiene 5 oncie e ll'altra 3. [...][5]

Anche se sono di carattere «puro», però, il loro substrato è il mondo del *know-how*, del «saper-fare», non il mondo del sapere fine a se stesso. Che nell'antichità questi due mondi fossero separati e il saper-fare non fosse un sottoprodotto del sapere «teorico», ce lo dice Aristotele in questo passo della *Metafisica*:[6]

> Orbene, sotto il profilo strettamente pratico, sembra che l'esperienza non differisca affatto dall'arte, anzi noi vediamo che gli empirici conseguono anche

[3] «From Ireland to India», nelle parole di Stith Thompson [1946: 11*ff*].

[4] [Hermelink 1978, titolo]. Qui, come nel seguito salvo altre indicazioni, la traduzione è di chi scrive.

[5] *Rascionei d'Argorsmo* no 123, a cura di [Vogel 1977: 131].

[6] 981ª12–23, trad. [Russo 1973: 4*f*].

> un successo maggiore rispetto a quelli che si basano sulla sola ragione senza avere un'adeguata esperienza (e il motivo di ciò sta nel fatto che l'esperienza è conoscenza del particolare, mentre l'arte è conoscenza dell'universale, e tutte le attività pratiche e produttive si occupano del particolare, giacché il medico non ha sotto cura l'uomo se non in via accidentale, ma ha sotto cura Callia o Socrate o qualche altro individuo designato con tale appellativo e a cui è cosa accidentale essere uomo; se, pertanto, un medico non tiene conto dell'esperienza e si basa sul solo ragionamento, e conosce l'universale, ma ignora il particolare che è in esso, molte volte sbaglia la cura, perché è proprio il particolare quello che bisogna curare).

La valorizzazione sociale dei portatori dei due tipi di sapere – quello «produttivo» e quello «teorico» – viene descritta da Aristotele in un altro passo:[7]

> A buon diritto [...] l'inventore di una qualsiasi arte, la quale si distaccasse dal comune mondo delle sensazioni, è stato anzitutto ammirato dagli uomini non soltanto per l'utilità di qualcuna delle sue invenzioni, ma perché egli stesso è stato ritenuto sapiente ed eccellente rispetto agli altri; e a mano a mano che aumentavano di numero i ritrovati delle arti e alcune di queste erano in relazione con i bisogni della vita, altre con il piacere, gli uomini che si sono dedicati a queste ultime sono stati sempre considerati più sapienti degli altri, per il fatto che le loro conoscenze non hanno nulla a che fare con l'utilità. Di conseguenza, solo quando tutte le arti di tal genere si furono sviluppate, vennero alla luce quelle scienze che non hanno attinenza né col piacere né con i bisogni, e ciò si riscontrò in primo luogo in quei paesi dove gli uomini godevano gli agi della libertà; per questo motivo le arti matematiche fiorirono dapprima in Egitto, giacché colà veniva concessa un'agiata libertà alla casta dei sacerdoti. [...] sicché, come prima dicevamo, chi si basa sull'esperienza sembra essere più sapiente di chi si fonda su una qualsiasi semplice sensazione, e chi si basa sull'arte sembra essere più sapiente di chi si basa sull'esperienza, e il dirigente più del semplice manovale, e le attività teoriche sembrano superiori a quelle pratiche.

La distinzione fra sapere «produttivo» e sapere «teorico» vale in generale, almeno per quei campi del sapere dove è possibile parlare di «teoria» nel mondo pre-moderno, e non solo per la matematica. Ma essa sarà qui più palese che altrove e comporterà implicazioni specifiche riguardo alla matematica, particolarmente a causa dell'esistenza dei problemi «di ricreazione» e del loro ruolo nello sviluppo della matematica «teorica»,

---

[7] 981^b13–33, trad. [Russo 1973: 5*f*] .

e grazie all'esistenza già nell'antichità di un complesso di sapere scientifico assai coerente per formalizzare i risultati delle tradizioni pratiche – situazione del tutto differente se guardiamo, per esempio, alle «scienze» fisiche fino al tardo Rinascimento. Nel seguito, anche quando non viene detto esplicitamente, la matematica sarà quindi il punto focale della discussione.

Prima di approfondire le osservazioni che riguardano la matematica dobbiamo distinguere non solo fra orientamento «produttivo» e orientamento «teorico» ma anche fra *modi di trasmissione* del sapere produttivo. Uno dei modi è la trasmissione dal maestro al proprio apprendista, «sul posto di lavoro»; il tipo di sapere che ne risulta è quello che chiamo «sotto-scientifico», per ragioni che verranno spiegate poi; l'altro modo è la trasmissione all'interno di un'istituzione scolastica, dove l'addestramento è separato dalla pratica vera e propria e viene effettuato da maestri legati soltanto in modo alquanto approssimativo alla pratica a cui preparano gli allievi; ne risulta un tipo di sapere che denoterò «sapere scolastico» (la cultura degli scribi babilonesi ne è un esempio adeguato).

Occorre non identificare il «sapere dei pratici» (sia «sotto-scientifico» sia «scolastico») col solo «sapere pratico» o «applicato». La differenza deriva dalla funzione (che è anche costitutiva) del sapere all'interno del *sistema sociale* portatore del sapere in questione.

Va da sé che una parte importante del sapere professionale del pratico è applicabile nella prassi che definisce la professione, almeno secondo la convinzione dell'ambiente in cui questa prassi si svolge; per esempio, che per noi sembri scientificamente illusorio molto del sapere dei medici seicenteschi non influisce sull'esistenza e sul prestigio della loro professionalità di allora. Riguardo a questa parte del sapere professionale, il ruolo dei *problemi* – cioè i problemi che definiscono la professione come professione pratica – è primario, e lo sviluppo di tecniche adatte per trattare questi problemi diviene una necessità derivata. L'addestramento dei futuri pratici, però, perfino quando viene svolto sul posto di lavoro, non può che cominciare con compiti più semplici di quelli che ci si aspettano una volta concluso l'apprendistato. L'addestramento perciò sarà in parte fatto sulla base di compiti preparati sopratutto allo scopo di allenare le tecniche che l'apprendista deve imparare ma che non sono rilevanti nei lavori realmente utili che si possono affidare a un principiante. In questo caso, le tecniche o i metodi diventano primari, e i problemi o compiti secondari, poiché derivano dalle tecniche e dai metodi che si intendono sviluppare. Chi possiede un minimo di familiarità con i libri scolastici di aritmetica elementare riconoscerà questa situazione, e la scuola è precisamente il luogo dove l'addestramento su problemi costruiti «su misura» prevalgono assolutamente. Nei sistemi maestro-apprendista, invece, anche se esistono problemi artificiali preparati sulla base di tecniche da trasmettere, c'è una tendenza a far lavorare l'apprendista nel modo più utile possibile, ossia di usare problemi «veri» benché semplici.

L'insegnamento scolastico spesso fa un uso moderato di problemi «di ricreazione»; essi rappresentano un modo per creare una varietà pedagogica, e per dimostrare che nell'insegnamento serio non manca sempre il piacere («der Lehrer, der uns lesen lehrte, hat vom Lernen dies gewusst: es soll kein Spiel sein, aber immer eine Lust», nelle parole di una canzone della defunta RDT) – almeno per quelli che svolgono valentemente il proprio lavoro. Nella scuola i problemi in questione sono davvero «di ricreazione»; ma la scuola non è il loro proprio terreno.

Il vero domicilio di questi problemi che distorcono le situazioni quotidiane creando casi eccezionali o addirittura assurdi, sia per quanto riguarda l'invenzione sia per la trasmissione, è il sistema di sapere sotto-scientifico. I sistemi sotto-scientifici, infatti, corrispondono a una cultura di tipo orale, laddove la scuola dipende sempre dalla cultura scritta.[8] I problemi «di ricreazione» sono *enigmi per specialisti*, e hanno in comune con altri enigmi questa qualità contenziosa che caratterizza la cultura orale in genere.[9] Spesso, quando essi si ritrovano nelle antologie di problemi o in manuali per pratici (genere letterari ancora vicini alla cultura orale) vengono introdotti da frasi del tipo «Se sei un calcolatore perfetto, dimmi ...», o presentati come artifici che stupiranno i non-specialisti ignari. Nel mondo pre-moderno, invero, il sapere sotto-scientifico non era un

---

[8] È importante ricordarsi che settori di cultura orale e settori di cultura scritta coesisteranno per lungo tempo nella società tradizionale dove viene introdotta la scrittura – cfr. per esempio [Ong 1982: 93*ff*].

[9] [Ong 1982: 43*ff* e *passim*]; v. anche [Koch 1995].

sapere popolare, era un monopolio di pochi – e lo era forse in più alto grado di quanto non sia oggi il sapere basato sulle scienze.

Le frasi introduttive ci dimostrano la vera funzione dei problemi «di ricreazione», che non era essenzialmente ricreazionale; non più, almeno, dell'enigma potenzialmente letale della Sfinge. Essi servono per dimostrare *il virtuosismo*, cioè, servono in primo luogo per dimostrare che la professione in se è svolta da specialisti esperti, in secondo luogo per permettere ai singoli membri della categoria di mostrarsi, e di scoprire se stessi, calcolatori/agrimensori/architetti/... perfetti.

Tale funzione determina il carattere dei problemi. Essi devono provocare un fascino immediato, ciò che spiega la «superficie ricreazionale»: Se un cammello trasporta una quantità di grano da un posto ad un altro, se è in grado di trasportare un terzo della quantità alla volta, e se sembra divorare esattamente *tutto* il grano durante il trasporto,[10] allora la soluzione «esperta» (che permette che ci sia un trasporto effettivo) può stupire; se fossero stati meno assurdi i numeri, allora la reazione probabile a un miglioramento soltanto di grado (diciamo, di 15 misure invece che di 10 misure) sarebbe un semplice «e allora?». Inoltre i problemi devono riferirsi alla pratica della professione – cantare anche con virtuosismo non aumenta il prestigio professionale di un calcolatore, al massimo permette barzellette spregevoli del tipo «il miglior cantante fra i calcolatori e il miglior calcolatore fra i cantanti». Perciò la *forma* dei problemi deve essere pratica. I problemi devono tuttavia essere più difficili di quelli che un modesto rappresentante qualsiasi della categoria sia in grado di risolvere senza difficoltà: questo, insieme alla caccia all'affascinante o all'assurdo, spiega

---

[10] «Un paterfamilias aveva due case, distanti l'una dall'altra 30 leghe, e un cammello che doveva trasportare da una casa all'altra 90 misure di grano in tre turni. Per ogni lega, il cammello mangiava sempre una misura. Dimmi, se vali qualcosa, quante misure restavano?» (*Propositiones ad acuendos iuvenes*, 52 versione II, a cura di [Folkerts 1978: 74]. Nella soluzione si chiede che il cammello faccia dapprima soltanto 20 leghe con le prime 30 misure, poi faccia un deposito delle 10 misure che restano, e ritorni per prendere altre 30 misure, ecc.; dopo tre turni si avranno 30 misure ad una distanza di 10 leghe dalla seconda casa, ciò che permette di trasportare 20 misure nette. Si vede facilmente che è possibile, invece, trasferire 25 misure se un primo deposito si fa dopo 10 leghe e un secondo dopo altre 15 leghe.

che *la sostanza* dei problemi è pura, cioè, che essi restano distinti dalla pratica vera – più distinti difatti di quanto non siano i problemi semplificati nell'insegnamento scolastico.

Non meno dei problemi scolastici, inoltre, gli enigmi professionali– i cosiddetti «problemi di ricreazione»– sono determinati dai metodi, cioè, dalle tecniche caratteristiche della professione, da quelle abilità che vengono acquisite nell'addestramento e nel lavoro professionale. Spesso, come gli altri enigmi, esse dipendono anche da un artificio particolare - nel caso del cammello, dall'interruzione del viaggio in un luogo intermedio. Tale artificio sarà riconosciuto fra i professionisti e non fra i non adepti, e farà dunque parte anch'esso dell'arsenale delle tecniche della professione *nella sua esistenza sociale.*

Artifici di questo genere spesso non sono generalizzabili e servono soltanto per un tipo particolare di enigma. Per di più (come spiegano Abū Kāmil e altri matematici del Medioevo islamico), i pratici che ne facevano uso non conoscevano sempre la ragione del perché essi funzionassero. Ci dice Abū Kāmil, prima di analizzare il problema dei «cento uccelli»,[11] che questo è

> un calcolo particolare che fa il giro fra la gente signorile e il volgo, fra i dotti e fra gli ignoranti, che dà loro piacere, e che essi trovano nuovo e bello. L'uno chiede all'altro, e riceve una risposta approssimativa e congetturata; non si conoscono né princìpi né regole nella materia.[12]

Per Abū Kāmil, come per un matematico moderno, tale atteggiamento è inaccettabile, forse perfino scandaloso. Per i membri dell'ambiente sotto-scientifico, invece, era un uso normale e del tutto legittimo del sapere. Lo scopo dell'invenzione e della soluzione di questi problemi «puri» non era la conoscenza ma il mostrarsi virtuoso, era la spavalderia. Il livello «puro» del sapere sotto-scientifico non è quindi, né direttamente né in modo indiretto, un supporto per l'attività pratica, né una riflessione sui princìpi che governano e giustificano la prassi. Esso è pertanto di carattere del tutto

[11] «Uno vuole spendere 40 denarj in 40 uciellj, di 3 ragionj cioè tordj, alodole e passore. Il tordo ghostj 3 denarj, e l'alodola 2 denarj, e 4 passore a denajo» (*Libro d'abaco* anonimo del sec. XIV, a cura di [Arrighi 1973: 34]); segue una variante con «100 Libre in 100 bestie grosse».

[12] Dalla traduzione tedesca di [Suter 1910: 100].

differente sia dal sapere puro o «teorico» da cui parlano Aristotele o al-Fārābī, sia dalla nostra «scienza pura», in ultimo destinata – questo almeno si dice per difendere la sua utilità sociale – ad essere applicata dopo trasformazioni idonee.

Un effetto dell'orientamento particolare del sapere puro di tipo sotto-scientifico è perciò che manca ad esso la dinamica del sapere teorico o «scientifico», per cui in principio sono i problemi aperti a richiedere la creazione di nuovi metodi, tecniche ed astuzie – metodi ecc. che fanno ancora emergere nuovi problemi aperti, o fanno addirittura valutare insufficienti le vecchie soluzioni. Il sapere sotto-scientifico, finché rimane nell'ambiente di origine, può restare immutato per secoli o, come vedremo, per millenni. Non è l'esistenza del sapere in sé, neppure del sapere non direttamente legato all'uso pratico, che stimola dinamismo; al contrario, è il sapere legato ad un certo atteggiamento riguardo al suo uso e scopo e condizionato da un ambiente sociale che impone tale atteggiamento.

Da questo punto di vista, e giudicato in relazione a un certo sistema di valori epistemologici (il nostro, ovviamente, non è un sistema che vale automaticamente in ogni cultura), può essere giustificata la caratterizzazione *sotto*-scientifica nella misura in cui il sapere che viene caratterizzato assomigli all'insieme di sapere tecnico e sapere teorico dell'epoca moderna, ma si tale che l'atteggiamento dell'ambiente nei riguardi della sua utilità (vi compresa utilità sociale) gli impedisca di svilupparsi come *sapere*.[13]

La metafora spaziale è però a doppio taglio, possiede un altro senso. Infatti, tutti i livelli del sistema di sapere sotto-scientifico, quello «puro» non meno che quello di uso pratico, sono spesso serviti da ispirazione per le varie matematiche scientifiche; non soltanto come base da cui esse si sono dapprima sviluppate, ma anche nelle loro fasi mature. In questo

---

[13] Occorre interpretare in quest'ottica le regole parzialmente o completamente false che dà Piero della Francesca per le equazioni del terzo, quarto, quinto e sesto grado. Nella stessa ottica si vede che il conflitto fra Tartaglia e Cardano non è un semplice scontro fra caratteri spigolosi ma esprime una svolta storica: l'uso che voleva fare il primo del suo artificio apparteneva al mondo contenzioso del sistema sotto-scientifico; il diritto e il dovere di pubblicare risultati importanti (dando tutto il credito dovuto) facevano parte del sistema di valori della scienza, che era senza dubbio quello di Cardano.

senso, il sistema sotto-scientifico è restato un substrato per il sistema scientifico – di solito un substrato anonimo e passato sotto silenzio.

L'uso di materiale di origine sotto-scientifica si può osservare nell'area greco-islamico, in India e in Cina.[14] Il *wasan* giapponese può persino rappresentare la conversione di un sistema sotto-scientifico in sistema proto-scientifico, sotto l'influenza di importazioni cinesi e nel contesto di una trasformazione corrispondente del sistema sociale portatore del sapere matematico.[15]

Nel mondo greco–islamico–pre-moderno europeo (il «mondo occidentale», se questo termine deve avere un senso storico e non soltanto il valore ideologico del discorso quotidiano), una tale conversione non fu mai possibile. Qui, come descritto da Aristotele, il sistema teorico era sempre socialmente segregato in un modo che in altre culture era riservata ad attività intellettuali diverse: In Giappone la musica cortese, in Cina la poesia mandarinesca strettamente legata al sistema di scrittura; entrambe le attività erano del tutto distinte dal cantare popolare, non-cortese e non-mandarinesco.

In «Occidente» (che, bisogna ricordarlo, va dall'Indus all'Atlantico), il prestigio particolare e la segregazione sociale del sapere filosofico e scientifico hanno fatto sì che la differenza fra sapere sotto-scientifico e sapere scientifico salti più agli occhi che altrove; o, piuttosto, che l'esistenza del sapere sotto-scientifico come sistema *per se* sia del tutto ignorata, e che i suoi risultati siano visti solo come prodotti più o meno corrotti derivati dal sapere «vero». Questa è un'altra versione della teoria dei folkloristi romantici, cioè che fiabe e racconti popolari siano *gesunkenes Kulturgut*, i resti di letterature e grandi mitologie estinte e che i veri rappresentanti della nazione siano dunque i bardi e i profeti del passato e il popolo volgare – i contadini stanchi, le nutrici maleducate con i loro racconti –

[14] Per esempio, l'algebra sottile di Zhu Shijie (lo *Specchio di giada* del 1303) ha affinità evidenti con la tradizione degli agrimensori, di cui parleremo più avanti, esattamente su questioni che pare non abbiano radici nella tradizione cinese – v. [Martzloff 1988: 149–152]. Sembra almeno probabile che l'erudito matematico si sia lasciato ispirare da questa tradizione sotto-scientifica forse diffusa tramite reti stabilite nell'impero mongolo.

[15] V. [Horiuchi 1994: 23–31].

un ignobile fango da cui bisogna estrarre i tesori prodotti dal «popolo vero».[16]

Anche senza questo disprezzo sarebbe difficile sapere molto sulla matematica pratica delle epoche pre-moderne. Essa non era di solito una materia sistematicamente affidata alla scrittura; i manuali scritti che esistevano non venivano copiati che in circostanze particolari,[17] e ancora più raramente erano copiati i calcoli fatti su ostraca o su pezzi di carta.[18]

Per di più, quando per caso qualche cosa è sopravvissuta, essa viene spesso mal interpretata. Da esempio può servire ciò che scrive Michael Mahoney nel *Dictionary of Scientific Biography* sulla *Geometrica* detta «di Erone». Essa viene considerata «essenzialmente» identica al libro I della *Metrica*;[19] invece «la *Geometrica*» è costituita da due conglomerati diversi (mss A+C e mss S+V, rispettivamente) messi insieme da Heiberg nell'edizione critica; A+C contiene una breve contaminazione Eroniana, ma per il resto sia A+C sia S+V assomigliano al trattato di Erone solo per il fatto che anche Erone fa uso delle tradizioni sotto-scientifiche rappresentate nelle due *Geometrica*.[20]

Se è dunque difficile conoscere il contenuto della matematica pratica, diventa ancora più arduo seguire e separare le tradizioni attraverso cui

---

[16] Almeno nella sua tendenza generale, l'ipotesi sull'origine della matematica che propone van der Waerden [1983] rispecchia il modo di pensare dei romantici. A parte questa differenza (e quelle che ne seguono), la sua tesi che le culture degli scribi abbiano sfruttato ispirazioni più vecchie ma anonime ha certe affinità con le idee qui proposte. Segue però una conseguenza importante dalla concezione romantica: in accordo con il prestigio di ogni casta sacra, la matematica pre-scribale dipinta da van der Waerden è una vera matematica, basata su conoscenze almeno proto-teoriche, una matematica cioè che non poteva che degradarsi quando fu adottata dagli scribi, filistei senza creatività agli occhi di un romantico.

[17] I pochi casi in cui ciò accadeva riguardano spesso culture con pretensioni scientifiche ma senza il potenziale necessario per capire testi scientifici – Bisanzio, l'Europa latina dopo la riforma carolingia.

[18] Dalla costruzione del Duomo di Milano sopravvive un solo calcolo – analizzato da Guy Beaujouan [1963]; da tanti altri lavori architettonici della stessa complessità non ci rimane neanche questo.

[19] [Mahoney 1972: 315].

[20] V. [Høyrup 1996b, 1996d].

essa è stata trasmessa. Di regola, le sue formule e le sue costruzioni geometriche sono troppo semplici per permetterci di distinguere fra invenzione indipendente e trasmissione – resta temerario affermare che gli Egiziani abbiano imparato dai Sumeri a raffigurare le persone con esattamente 10 dita.

Ciò nondimeno rimane possibile rintracciare nella matematica della scuola d'abbaco elementi che risalgono a tradizioni sotto-scientifiche più o meno identificabili e localizzabili, nonostante il passaggio attraverso la tradizione scritta araba e le interazioni anche con la matematica della scuola latina (una matematica che rappresenta veramente un *gesunkenes Kulturgut* e che, come matematica, non di rado ci sembra meno interessante di quella dell'abbaco, ma che rimane di tipo «teorico» o «scientifico».[21]

Un primo elemento è costituito dalle «frazioni continue ascendenti», espressioni del tipo «un terzo, e due quinti di un terzo»,

$$\frac{1+\frac{2}{5}}{3}\,.$$

Si sa bene che queste frazioni vengono descritte nel quarto capitolo del *Liber abaci*, e che Leonardo le descrive lì con una notazione che era in uso nell'aritmetica della *madrasah* del Maghreb.[22]

Nella tradizione della scuola d'abbaco tali frazioni sopravvivono fino a quando le descrive Clavius;[23] Jordanus de Nemore cerca di naturalizzarle nella matematica latina e di collegarle alla tradizione letteraria latina,[24] ma sembra che nessun altro scrittore abbia mai adottato il suo concetto di «frazioni dissimili», rimasto così particolare che Eneström ha frainteso il testo che stava pubblicando.[25]

[21] Quest'osservazione ci ricorda che la dicotomia «scientifico»/«sotto-scientifico» è descrittiva e non comporta nessun giudizio di valore, né necessariamente una valutazione del livello matematico.

[22] A cura di [Boncompagni 1857: 24]; cfr. al-Qalaṣādī, *Kašf al-asrār 'an 'ilm ḥurūf al-ġubār*, a cura di [Souissi 1988: 49].

[23] V. [Vogel 1982].

[24] V. [Høyrup 1988: 337*f*].

[25] [Enestrøm 1913: 44].

Abitualmente, queste frazioni vengono considerate come un idioma particolare arabo. Invece, esse si ritrovano anche in vari testi babilonesi, sia del II che del I millennio avanti Cristo, come mezzo usato quando non bastano le suddivisioni metrologiche. Non conosco fonti in siriaco dove appaiono queste frazioni particolari, ma esse si ritrovano in alcuni testi greci che sono indubbiamente di ispirazione siriaca; ossia, in vari punti delle *Geometrica* (mai invece nella *Metrica*) e, in forma di parodia, in quegli epigrammi aritmetici dell'*Antologia greca* che riferiscono di tecniche legate al Vicino Oriente.[26]

Esse si ritrovano anche in un solo testo matematico dell'antico Egitto, cioè nel problema 37 del Papiro Matematico Rhind:[27]

> Entro 3 volte nella misura ḥekat; un terzo di me mi viene aggiunto, un terzo di un terzo di me mi viene aggiunto, un nono di me mi viene aggiunto. Sono soddisfatto [cioè, il ḥekat è pieno]. Chi lo dice?

Un problema troppo simile per essere del tutto indipendente da questo si trova in una tavoletta babilonese del 1800 a. C. circa che appartiene a un gruppo di testi vicini alla tradizione non-scolastica:[28]

> Ai $\frac{2}{3}$ dei miei $\frac{2}{3}$ ho aggiunto 100 sìla [1 sìla ≈ 1 litro] di grano e ancora i miei $\frac{2}{3}$, e 1 gur [= 300 sìla] era completato.

La soluzione del problema egiziano avviene in modo corretto e tipico per il Papiro Rhind. Quella babilonese, invece, non è affatto una soluzione ma una manipolazione di numeri che già presuppone la soluzione – una *Schimpfrechnung*, come la chiamerebbero i cossisti tedeschi del Cinquecento. Non c'è dubbio che il problema abbia viaggiato con gente pratica, portatrice di un sapere sotto-scientifico, gente che usava l'idioma delle frazioni continue ascendenti. Nell'Egitto, come spesso accadeva quando materiali di origine sotto-scientifica venivano adottati nella scuola o nella scienza,

---

[26] V. [Høyrup 1990c: 298*f*] per quanto riguarda l'*Antologia greca*.

[27] Trad. inglese [Peet 1923: 74].

[28] [Baqir 1951: 37], interpretazione [von Soden 1952: 52]. Per riconoscere la similitudine fra il problema egiziano e quello babilonese occorre ricordarsi che $\frac{2}{3}$ veniva considerata una «frazione semplice» allo stesso modo che $\frac{1}{3}$.

Per quanto riguarda la prossimità di certi testi babilonesi della tradizione non-scolastica, v. [Høyrup 1996a].

soltanto il problema venne acquisto, mentre la tecnica per risolverlo fu giudicata insoddisfacente (nel caso presente lo è veramente da ogni punto di vista matematico) e rigettata. In testi babilonesi un po' più tardivi, dove però sono scomparse anche le frazioni continue ascendenti, si verifica un'analoga normalizzazione.

Processi di questo genere dimostrano che non sono le culture «alte» della scuola o della scienza pre-moderna ad avere rapporti culturali fra di loro; anzi, i rapporti li avevano le comunità di pratici, da cui le culture alte prendevano il materiale per loro interessante, comunità le cui delimitazioni geografiche non coincidevano con quelle delle culture alte.

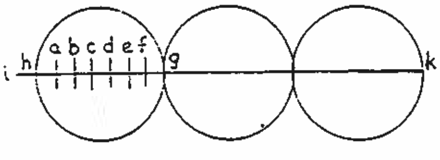
In tal caso, sembra consistere di mercanti di lingue semitiche la comunità che usava, già nei primi secoli del secondo millennio avanti Cristo, e ancora nel Medioevo, l'idioma delle frazioni continue ascendenti. Gruppi che entravano in contatto con questi mercanti hanno preso l'idioma in prestito, ma sempre con riluttanza quando la loro lingua non era di tipo semitico; si può constatere ciò in Egitto, e nella cultura greca della bassa antichità, come anche nell'Europa latino-italiana del tardo Medioevo.

Per mostrare che non tutto viene adottato ovunque, ciò che è necessario perché sia possibile distinguere influenze speciali, conviene esibire come esempio una procedura che ho cercato invano in vari trattati d'abbaco. Si tratta di un modo particolare di esprimere la lunghezza di una circonferenza. Nei testi babilonesi, nei problemi dove essa si deduce dal diametro (si tratta sempre di testi piuttosto vicini alla tradizione non-scolastica), la circonferenza non si esprime mai come «3 volte il diametro», con la moltiplicazione che si usa negli stessi testi dove l'area viene trovata come 5 (cioè $^5/_{60}$) volte il quadrato della circonferenza. Il diametro viene invece «ripetuto fino a 3», o la circonferenza viene espressa come «il triplo del diametro» – operazioni che hanno entrambi un carattere ripetitivo.

Nella *Geometrica* appaiono varie formule che collegano il diametro d con la circonferenza: $c = (22 \cdot d):7$; $c = (d:7) \cdot 22$;– è infine $c = 3d + {}^1/_7 d$. In quest'ultimo calcolo, il valore di $3d$ viene sempre trovato separatamente, e $^1/_7 d$ aggiunto dopo; inoltre, $3d$ viene anche qui espresso con un'operazione ripetitiva e mai tramite la moltiplicazione che si usa nelle altre formule. È difficile evitare la conclusione che è il calcolo babilonese (o piuttosto pre-babilonese) provvisto di una correzione archimedea, quello che ricorre nella formula greca. Che la correzione sia dovuta a pratici anonimi ce lo dice più o meno chiaramente Erone quando fa riferimento a coloro che assumono che la circonferenza sia «il triplo del diametro, e la settima parte in più».[29]

Nei trattati arabi che conosco si moltiplica invece direttamente per $3\frac{1}{7}$ senza difficoltà e la vecchia formula (sia corretta che non) sembra scomparsa. Come già detto, la stessa situazione sembra presentarsi nei trattati d'abbaco. La formula ricorre invece (con la correzione) nella *Geometria deutsch* di Mathes Roriczer del 1480 circa, sviluppata come procedura costruttiva:[30]

> Chi vuole fare dritto un tratto rotondo in modo che il tratto dritto e quello rotondo siano ugualmente lunghi, deve fare tre volte il rotondo uno accanto all'altro e poi dividere il diametro dell'ultimo dei tre cerchi in 7 parti uguali e aggiungere una parte.



Da *Geometria deutsch*, a cura di [Shelby 1977: 121].

L'uso di una tale procedura concreta è la causa probabile che una formula così caratteristica e inconsueta sia sopravvissuta per 3500 anni.

Geometria deutsch deriva dalla tradizione post-antica europea, quella degli edificatori delle cattedrali e dei monasteri. Il fatto che una formula che fu sempre presente in queste culture non si ritrovi nelle geometrie pratiche «di abbaco» è un argomento in più (ce ne sono altri, più forti) per riguardare la scuola d'abbaco come parte di un fenomeno pan-mediterraneo il cui nucleo si trovava nell'ambito islamico.

Altri aspetti della lingua e delle tecniche non sono abbastanza evidenti per permetterci di trarre conclusioni analoghe sulle loro origini e rapporti. Torniamo dunque agli enigmi matematici, i cosiddetti «problemi di

---

29 *Metrica* I,31, a cura di [Schöne 1903: 74]. Erone, che conosce bene gli scritti di Archimede, è dunque testimone che la formulazione della – corrotta – proposizione 2 della *Misura del cerchio* non è dovuta ad Archimede ma, invece, ad una contaminazione che risale alla tradizione pratica.

30 *Geometria deutsch* no 9, a cura di [Shelby 1977: 120].

ricreazione». Due gruppi distinti ci interessano.

Al primo appartengono, fra altri, «l'acquisto di un cavallo in comune»,[31] «i cento uccelli», e «il raddoppiamento dell'unità» fino a 30 o 64 volte.[32] Si sa che tutti si trovano nel Medioevo ovunque fra India e Fez,[33] e che la struttura caratteristica dell'acquisto del cavallo ricorre nei *Nove capitoli sull'aritmetica* [34] e nell'*Arithmetica* I.xxiv–xxv di Diofanto.

È meno noto che il primo libro della *Repubblica* di Platone sembra contenere (333b–c) un riferimento allo stesso problema – l'acquisto di un cavallo «in comune» è una situazione dove c'è bisogno di un esperto. Poiché il «fiore di Tymaride» (un artificio per risolvere problemi differenti ma dello stesso genere[35]) risale anch'esso all'epoca di Platone, ci sono buone ragioni per credere che l'acquisto del cavallo sia stato già un problema celebre nel mondo mediterraneo verso il 400 avanti Cristo.

Come ha dimostrato Jean Christianides,[36] un papiro greco-egiziano contiene una versione del problema dei 100 uccelli, benché in forma ancora immatura (100 unità, prezzo totale 2500), come se non si fosse ancora trovata la forma «giusta per stupire» – le 100 unità monetarie e i 100 uccelli. È perciò probabile che questo problema sia una creazione dell'epoca classica; poiché se ne trovano versioni simili anche in epoca più bassa, benché ciò non accade spesso, l'inferenza resta però ipotetica. In ogni caso

---

[31] «Doie huomene avendo d⟨enaro⟩ trovaro uno chavallo che se vendea, disse el primo al secondo: se tu me dàie $\frac{1}{3}$ degl tuoie d. chon gle denare ch'io àgio iio avero el preço del chavallo. Respuse el secondo e disse: se tu me dàie el $\frac{1}{4}$ degl. tuoie d., chon quigle ch'io agio, iio averò semeglamente. Adomandote el preço del chavallo e egl d. ch'ànno ciascuno» (esempio tratto da un *Livero de l'abbecho* umbro del secolo XIII, a cura di [Arrighi 1989: 68]).

[32] "Duplare uno granello de formento tante volte: quante che sonno casi bianche e nere in lo tauolieri da scachi: che sono 64 in tutto" [Pacioli 1523: 43r].

[33] V. per esempio [Tropfke/Vogel 1980].

[34] VIII.10,12,13, a cura di [Vogel 1968: 86*f*]. Anche se altri capitoli del trattato cinese risalgono ai secoli prima di Cristo, questo capitolo è del primo secolo dopo Cristo [Martzloff 1988: 118*ff*].

[35] V. [Heath 1921: I, 94]. È persino possibile trasformare il problema dell'acquisto del cavallo e dargli una forma che permetta l'uso del fiore di Tymaride.

[36] [Christianidis 1994: 240], cfr. testo in [Winter (cura) 1936: 39].

se ne trovano già parecchi esempi in forma matura nelle *Propositiones ad acuendos iuvenes*[37] (un'antologia di problemi «di ricreazione» dell'età carolingia che forse è stata messa insieme da Alcuin e i cui singoli problemi circolavano presumibilmente in Gallia fin dalla tarda antichità), e anche nello *Zhang Qiujian suanjing* cinese del quinto (?) secolo.[38] È pertanto quasi certo che il problema abbia raggiunto la sua forma matura già nei primi secoli dopo Cristo.

Molto più vecchio è invece il raddoppiamento dell'unità. In un testo di Mari, una città a nord della Babilonia vera e propria, che risale a 1800 anni circa prima di Cristo[39], si tratta di grano, e la formulazione è additiva («ad ogni grano, un grano»); si va fino a 30 raddoppiamenti[40] e le grandi quantità sono espresse in unità metrologiche invece che in numero di grani. Lo stesso problema con argento invece di grano, ma con 30 raddoppiamenti e con l'uso di misure metrologiche, ricorre in un papiro greco-egiziano.[41] Nelle *Propositiones* ritroviamo la formula additiva, ancora con 30 raddoppiamenti ma senza unità metrologiche (già, perché si tratta di uomini). Negli stessi decenni al-Khwārizmī scrive un trattato, andato perduto, sul problema della scacchiera, con i suoi 64 raddoppiamenti; sia 30 sia 64 raddoppiamenti si ritrovano poi un po' dappertutto nel medio e basso Medioevo.

Sembra che questo gruppo di problemi appartenesse durante l'antichità e il Medioevo alla comunità di mercanti che viaggiavano attraverso la cosiddetta «Via della Sete» e ad altri gruppi locali legati a questa comunità. Come ho già detto, Diofanto fa uso dei suoi problemi nel primo libro dell'*Arithmetica*. Ma lo stesso gruppo può aver lasciato, sia a lui che alla matematica araba, anche *una tecnica* molto importante: l'algebra dell'*arithmós*/*šay'*/*res* usata per risolvere problemi di primo grado. Che questa algebra «della cosa» sia stata vista nel mondo dei calcolatori (almeno in

[37] A cura di [Folkerts 1978].

[38] V. [Martzloff 1988: 293*f*].

[39] A cura di [Soubeyran 1984: 30].

[40] Non è forse senza interesse ricordare che esisteva all'epoca una «scacchiera» con 30 scacchi.

[41] P. Ifao 88, a cura di [Boyaval 1971].

quelli arabi) come diversa dall'algebra d'*al-jabr* è ovvio nel *Liber abaci*, dove essa viene introdotta nella discussione del problema «dare e prendere» sotto il nome di *regula recta*, detta eccellente e in uso fra gli arabi[42]. Ma quello che fa Leonardo coincide precisamente con il metodo usato da Diofanto per risolvere lo stesso problema nell'*Arithmetica* I.xv. Sembra più che probabile che Leonardo e le sue fonti abbiano davvero ragione e che *regula recta* e *al-jabr* siano veramente tecniche con origini distinte.[43]

L'altro gruppo che ci interessa ha una storia e un'origine diverse, ma anch'esso ha un rapporto indiretto con l'algebra. Esso risale ai geometri pratici (agrimensori, forse anche architetti ecc.) dell'Iraq non-sumerico del tardo terzo millennio prima di Cristo; forse tale gruppo era diffuso in un'area più vasta, nell'Iran e altrove, ma non ci sono fonti che lo confermano. Si tratta di un gruppo di enigmi geometrici che riguardano quadrati e rettangoli.[44] Se s indica il lato di un quadrato, Q la sua area, d la diagonale e ${}_4s$ «i quattro lati» o «tutti i lati», gli enigmi originali su un solo quadrato sono

$$s+Q = 110 \qquad {}_4s+Q = 140\ .$$

L'ordine dei membri indica che i lati sono menzionati prima dell'area, in accordo con un principio di valore generale per gli enigmi (matematici e, quando è rilevante, non-matematici); ossia, l'entità (negli enigmi matematici, la quantità) direttamente conoscibile viene presentata prima, le entità derivate poi. Verosimile è anche l'esistenza di problemi analoghi di tipo sottrattivo:

$$Q-s = p \qquad Q-{}_4s = q \qquad {}_4s-Q = r$$

e forse persino del problema matematicamente sbagliato

[42] A cura di [Boncompagni 1857: 203]. Nel seguito il nome ricorre spesso, sempre prima che sia introdotta l'algebra d'*al-jabr*; si tratta sempre di algebra retorica di primo grado con una sola variabile (il *res*, arabo *šay'*).

[43] Questa osservazione naturalmente non impedisce che le due tecniche fossero amalgamate da tempo quando il *Liber abaci* fu scritto. Difatti, questo già accadeva nel trattato di al-Khwārizmī.

[44] La scoperta (assai recente) di questa tradizione, che va dal 2000 prima di Cristo fino a Pedro Nunez, viene descritta in [Høyrup 1996] e ancora in [Høyrup 1996c]. Poiché l'argomento è complesso, rinvio a queste pubblicazioni per una discussione più precisa; nel presente contesto ripeterò solo alcuni dei risultati.

$$d - s = 4$$

– sbagliato nel senso che corrispondeva alla soluzione approssimativa $d = 14$, $s = 10$ – e del problema[45]

$$_4 s = A \ .$$

Per due quadrati con aree Q_1 e Q_2, vengono posti i problemi seguenti:

$$Q_1 + Q_2 = p \ , \quad s_1 \pm s_2 = q$$

e

$$Q_1 - Q_2 = p \ , \quad s_1 \pm s_2 = q \ .$$

Per rettangoli con area A, lati l e w e diagonale d sembrano essere esistiti i problemi:

$$A = p \ , \quad l \pm w = q$$
$$A + (l \pm w) = p \ , \quad l \mp w = q$$
$$A = p \ , \quad d = Q$$

e forse

$$_2 l + _2 w = A \ , \quad l - w = p$$

insieme ad altre versioni dei problemi precedenti con «tutti i lati».[46]

Poiché i lati venivano visti como «linee larghe», cioè come provvisti di una larghezza 1 (un artificio che permette di identificare le loro lunghezze con le aree della stessa grandezza[47]), tutti i problemi hanno un senso geometrico. La somma dei quattro lati e l'area del quadrato, per esempio, si può rappresentare mediante una configurazione ben nota e descritta nell'*Algebra* di al-Khwārizmī (v. la prossima pagina):

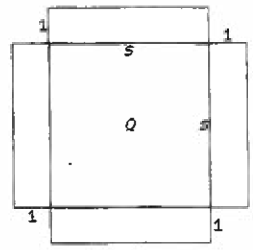
Per risolvere il problema si aggiunge un quadrato 1×1 in ogni angolo. Così l'area completata sarà 144, il suo lato quindi 12, ecc.

---

[45] Questa possibilità non viene discussa nelle mie pubblicazioni precedenti, perché ho creduto che la sua presenza nelle fonti medioevali (*Liber mensurationum*, *Pratica geometrie*) potesse essere un fenomeno tardivo. Invece essa viene discussa in Iamblicho [Heath 1921: I, 96*f*], il che suggerisce un punto di partenza comune, e cioè la tradizione degli agrimensori. Per ragioni stilistiche sembra plausibile affermare che questo punto di partenza coincida con l'invenzione degli altri problemi su combinazioni dei quattro lati e l'area verso il 2000 a.C.

[46] Anche questa possibilità viene suggerita da una confronto fra fonti medioevali e Iamblicho.

[47] Il concetto della «linea largha» e sua la diffusione in molte culture viene discusso in [Høyrup 1995].



Non siamo in possesso di fonti dirette per tutto questo; l'ambiente degli agrimensori era un'ambiente non-scolastico e probabilmente orale che non ha lasciato niente di scritto (almeno, niente che sopravvive). Si possono avere informazioni soltanto in modo indiretto, per via di un'analisi approfondita e che tenga conto delle varie tradizioni scientifiche e scolastiche che hanno sfruttato i suoi lasciti.

La prima di queste è la scuola paleobabilonese degli scribi, che va dal 1800 circa fino al 1600 prima di Cristo. Questa scuola, la prima di cultura babilonese anziché sumerica, prende possesso della piccola collezione di enigmi geometrici e ne crea una vera disciplina matematica – la cosiddetta «algebra babilonese» –, usando la stessa tecnica di separazione e riaggregazione degli agrimensori, ma introducendo anche altri metodi per trattare problemi non-normalizzati e problemi di natura non-geometrica rappresentati in modo geometrico.

Talora è facile riconoscere l'origine extra-scolastica dei problemi scolastici, talora no; qualche volta è ovvio che un problema è un'invenzione della scuola. Un caso particolarmente evidente è un problema che nel contesto della tavoletta completa sembra essere un pezzo di folklore inserito lì per dimostrare che i metodi insegnati nei primi 22 problemi servono anche per i vecchi cari enigmi, trasformati (come sempre quando essi vengono adottati nell'ambiente scolastico) in «problemi di ricreazione»:[48]

[48] BM 13901 no 23, a cura di [Neugebauer 1935: III, 4*f*]. Come vale per tutte le traduzioni di Neugebauer (e per altre traduzioni dell'«algebra babilonese» fatte prima del 1990), la traduzione nell'edizione presuppone un'interpretazione puramente aritmetica della tecnica, interpretazione oggi sorpassata. La traduzione offerta qui si fonda su un'interpretazione geometrica, la cui necessità è discussa per esempio in [Høyrup 1990]. I numeri, scritti nella tavoletta nel sistema di posizione a base 60, vengono trascritti in accordo con la notazione di Thureau-Dangin che, nel caso presente, coincide con la notazione familiare per gradi, minuti e secondi.

Il metodo che viene discusso nel testo non corrisponde esattamente a quello descritto sopra: invece di completare la figura cruciforme nei quattro angoli, si prende un quarto della configurazione completa, ciò che richiede soltanto un singolo complemento.

Riguardo a una superficie. Ho messo insieme i quattro fronti e la superficie [quadrata poiché caratterizzata da quattro «fronti»]: 41´40´´.
4, dei quattro fronti, tu inscrivi. L'inverso di 4 è 15´.
15´ a 41´40´´ tu alzi [cioè, moltiplica], 10´25´´ tu inscrivi.
1, la sporgenza [cioè, la larghezza 1 che trasforma il lato o «fronte» in «linea larga»] tu aggiungi [infatti, è il complemento quadrato compreso fra due sporgenze che viene aggiunto]. 1°10´25´´ ha 1°5´ come lato.
1, la sporgenza che hai aggiunta, tu togli: 5´ fino a due
tu ripeti: 10´ nindan [l'unità fondamentale per misure di lunghezza orizzontali] si confronta [come fronte della superficie quadrata].

Già la frase introduttiva, «Riguardo a una superficie», è un'ellissi per «Se qualcuno ti chiede così riguardo a una superficie» – un riferimento all'origine enigmistica (e alla funzione originale dell'enigma: sfida invece di ricreazione). Importante è anche l'ordine dei membri: non c'è un solo problema babilonese, a parte il presente, che parli dei lati prima dell'area. Degna di nota, infine, è la soluzione: nessun altro problema babilonese che tratta di un solo quadrato dà il lato come 10 (in nessun ordine di grandezza) – i valori preferiti sono 30´ e 30; 20´ è un'alternativa possibile ma piuttosto rara.

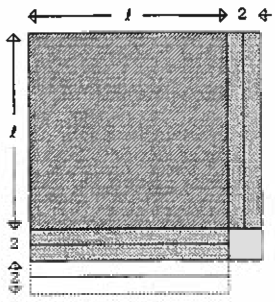
Dopo il 1600 sparisce l'istituzione della scuola degli scribi; sparisce anche l'algebra raffinata che aveva prodotto la scuola. Rimane invece la professione del geometro pratico, che per millenni si ritroverà dappertutto nel Vicino Oriente – Abū'l-Wafā' ne parla ancora negli anni 990 dopo Cristo[49] come di un gruppo ben definito che, per problemi di tipo enigmistico (cambiare tre quadrati in un solo quadrato), fa ancora uso di tecniche di separazione e riaggregazione.

Rimangono anche gli enigmi quasi-algebrici. Nell'epoca tardiva riappare perfino in Babilonia un interesse algebrico, e certi aspetti della terminologia dimostrano che la trasmissione si è diffusa attraverso un ambiente non-scolastico. Più interessante per noi è scoprire le tracce della quasi-algebra enigmistica nella cultura greca. Non è questa l'occasione per discutere il rapporto fra la cosiddetta «algebra geometrica» del libro II degli *Elementi* e la tradizione quasi-algebrica; basti dire che tutta la serie *Elementi* II.1–10

[49] *Libro su ciò che è necessario per l'artigiano nella costruzione geometrica* X.xiii, trad. russa [Krasnova 1966: 115].

pare essere una «critica» in senso quasi-Kantiano dei metodi usati dagli agrimensori per risolvere gli enigmi quasi-algebrici, analizzando *perché e sotto quali condizioni* essi sono giustificabili.

Il fatto che sia i problemi che i metodi tradizionali fossero conosciuti nel mondo greco trova conferma nella *Geometrica* pseudo-Eroniana (ms S), dove si trova il problema seguente (la figura non compare nel manoscritto dove vi è solo un quadrato, ma corrisponde al testo):



> Una superficie quadrata la cui area insieme al perimetro è 896 piedi. Occorre separare l'area e il perimetro. Faccio così: in generale [cioè, indipendentemente dal numero 896], poni fuori le quattro unità, di cui la metà diventa 2 piedi. Mettendo questo sopra se stesso diventa 4. Mettendo ora questo insieme a 896 diventa 900, il cui lato quadratizzante diventa 30 piedi. Ho tolto di sotto la metà, 2 piedi restano. Il residuo diventa 28 piedi. Così l'area è 784 piedi, e il perimetro sarà 112 piedi. Mettendo ora insieme tutto questo si avrà 896 piedi. Che l'area con il perimetro sia tanto, 896 piedi.[50]

Anche nel primo libro dell'*Arithmetica* di Diofanto si ritrovano problemi che sembrano provenire dalla tradizione quasi-algebrica. Come ho discusso altrove,[51] è persino possibile che il concetto geometrico del *dýnamis*, il quadrato parametrizzato dal lato anziché dall'area e il nome di «potenza» (nella lingua moderna, seconda potenza) della quantità incognita, sia un prestito (e la parola un calco) dalla tradizione del Vicino Oriente.

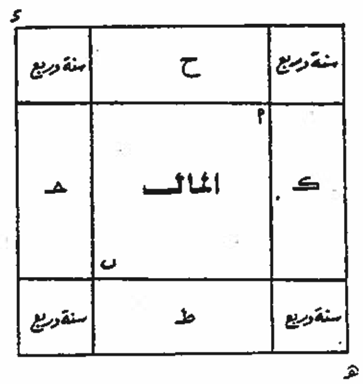
Nelle fonti del Medioevo islamico, la tradizione si fa sentire principalmente in due modi. Dapprima, al-Khwārizmī ha conosciuto gli enigmi e se ne serve quando trasforma la tecnica d'*al-jabr* in disciplina scientifica. Anche *al-jabr* era dapprima una tradizione sotto-scientifica, forse con radici nell'Asia centrale (Khwarezm? Turchestan?). Non siamo in grado di dire molto sulla sua forma prima della trasformazione effettuata da al-Khwārizmī, neanche in quale misura precisa essa fosse già amalgamata con l'algebra del *res*. Ciò che possiamo sapere è che il suo nucleo consisteva in un gruppo

[50] A cura di [Heiberg 1912: 418].

[51] [Høyrup 1990b].

di problemi su una quantità monetaria («un avere») e la sua radice quadrata. Nella loro origine essi erano enigmi ma, già al tempo di al-Khwārizmī, erano visti come paradigmi standardizzati per risolvere problemi numerici di secondo grado.[52] L'esempio che dà al-Khwārizmī del primo caso misto (esempio che nell'algebra italiana e latina sarà ripetuto fino al Cinquecento) è che la somma dell'avere e di dieci sue radici sia uguale a 39 dirhem; nella tradizione che conosce al-Khwārizmī esso viene risolto tramite un algoritmo senza prova né argomentazione: «dimezza le radici [5], moltiplica la metà con se stessa [25], aggiungi il risultato ai dirhem [25+39= 64], prendine la radice [8], taglia la metà delle radici [8–5= 3], questo sarà la radice dell'avere, e l'avere stesso sarà il prodotto della radice con se stesso [9]».

Quando gli fu chiesto dal califfo al-Ma'mūn di scrivere un'introduzione a questa tecnica, al-Khwārizmī fece di più: egli trasformò il soggetto in matematica scientifica, arricchendolo di dimostrazioni. Egli non usò per questo scopo (come avrebbero fatto più tardi Thābit ibn Qurrah et Abū Kāmil) i teoremi degli *Elementi* II ma applicò invece la fonte originale, ossia la tecnica degli enigmi degli agrimensori. La sua prima dimostrazione viene invero dalla soluzione del problema dei quattro lati e dell'area vista sopra.



La prima dimostrazione geometrica di al-Khwārizmī, a cura di [Mušarrafah & Aḥmad 1939: 22].

A lungo andare, il trattato di al-Khwārizmī fece dimenticare ciò che era esistito prima, e le dimostrazioni geometriche vennero considerate il nucleo stesso della disciplina. Quando essa fu adottata da Leonardo, egli presentò

[52] I problemi parlano prima dell'avere, dopo della radice. Quest'ordine riflette il carattere enigmistico dei problemi: dapprima viene menzionata la grandezza direttamente conoscibile (l'avere), dopo la grandezza derivata da essa (la sua radice quadrata). Dopo l'interpretazione della radice dell'avere come «radice dell'equazione» e dell'avere stesso come seconda potenza della radice, l'ordine, senza essere cambiato, diventa quello a noi familiare: dapprima la seconda, poi la prima potenza.

persino *māl*/*census* (l'avere) come un'altra parola per il quadrato geometrico – cioè il quadrato che nelle dimostrazioni *rappresentava* il *māl*, una volta quantità monetaria, poi genericamente numerica. La radice – per al-Khwārizmī ancora un numero, la radice quadrato del *māl* – fu presentata da Leonardo come una linea larga.[53]

Ci sono però influenze ancora più dirette della vecchia tradizione geometrica sul mondo islamico. Una fonte è il *Liber mensurationum*[54] di un certo Abū Bakr, un trattato che ci è stato trasmesso soltanto nella traduzione latina di Gherardo di Cremona, ma che potrebbe risalire alla prima parte del nono secolo. Lì si ritrovano pressappoco tutti i vecchi problemi, ivi compreso «i quattro lati e l'area», con i lati menzionati prima e con lato 10. Ma anche la *Collezione* (o *Liber embadorum*) di Savasorda ne contiene una grande parte; fra i pochi trattati arabi di calcolo pratico che sono stati pubblicati, in almeno uno (la *Ricchezza del calcolatore* di ibn Thabāt, del primo Duecento) se ne trovano alcuni. È assai probabile che i vecchi enigmi abbiano conosciuto ampia diffusione.

Nel mondo italiano essi sembrano entrare attraverso la *Pratica geometrie* del 1220 di Leonardo Fibonacci. È facile mostrare che Leonardo abbia sfruttato la traduzione del *Liber mensurationum* fatta da Gherardo, e senza dubbio anche il *Liber embadorum*. Lo considero probabile ma non dimostrato che egli abbia anche ricevuto ispirazioni dirette dal mondo islamico in questo come in altri campi; alternativamente, egli ha dovuto riscoprire vecchie tecniche geometriche che non vengono esposte nelle due fonti riconoscibili.

Nella *Pratica geometrie*, il problema dei quattro lati e l'area serve come paradigma generale per il primo caso misto d'*al-jabr* – «avere più radici uguali a numero».[55] Forse per questa ragione, forse per volontà generica di «normalizzazione» e perché non vede ragioni di distinguere fra quasi-

---

[53] *Pratica geometrie* III.ii, a cura di [Boncompagni 1862: 56f]. Nel *Liber abaci*, invece, Leonardo identifica il *census* con un quadrato ma, almeno così sembra essere il significato, con un *numero quadrato*, poiché i quadrati *geometrici* vengono designati *quadrilateri* [a cura di Boncompagni 1857: 406, 408].

[54] A cura di [Busard 1968].

[55] Nel *Liber abaci*, invece, la descrizione è più ortodossa, cioè, più vicino allo stile di al-Khwārizmī e di Abū Kāmil.

algebra e algebra d'*al-jabr*, in ogni caso Leonardo cambia l'ordine dei membri e parla della «superficie [quadrata] e i suoi quattro lati».[56]

Anche Piero della Francesca nel suo *Trattato d'abaco*[57] sceglie «i quattro lati e l'area» più o meno come paradigma; è ovviamente possibile che sia stato ispirato per questo da Leonardo, ma il suo modo di esprimersi – «giunge» l'area ai quattro lati (che dobbiamo perciò immaginarci già presenti) mentre tutti gli altri fanno un'operazione simmetrica – suggerisce un'ispirazione diretta dal mondo arabo. Merita un'analisi più profonda di quella sviluppata finora il fatto che gli altri problemi quasi-algebrici vengano presentati tutti insieme, e molto più avanti nel trattato, ossia nella parte geometrica.

Luca Pacioli tratta l'algebra nel penultimo capitolo della prima parte della *Summa de arithmetica*. Lì egli segue lo stile ortodosso derivato da al-Khwārizmī – per esempio, il paradigma per il primo caso misto è lo stesso di quello di al-Khwārizmī e del *Liber abaci*.[58] Poi, nella seconda parte (quella geometrica), egli afferma[59] che

> Benche nela parte de arithmetica dicessimo de la regola dalghebra assai copiosamente: Niente dimeno e necessario alcuna cosa qui dirne.

Ciò che segue è tratto dalla *Pratica de geometrie* di Leonardo, e perciò potrebbe sembrare essere di scarso interesse per noi. Al contrario è interessante: Pacioli (o piuttosto il trattato di geometria che segue[60]) ritorna all'ordine originale dei membri; per di più, egli corregge altrove un passo che era corrotto già nella traduzione di Gherardo, e che Leonardo non ha saputo correggere benché consapevole del fatto che qualcosa non fosse giusto. Tuttavia la sua correzione è solo parziale, il che significa che non

---

[56] A cura di [Boncompagni 1862: 59].

[57] A cura di [Arrighi 1970: 122].

[58] Dist. 8, tratt. 5, [Pacioli 1523: I, 145^v].

[59] Dist. 3, cap. 1, [Pacioli 1523: II, 15^r].

[60] Infatti, Pacioli sfrutta un manoscritto anonimo (Biblioteca nazionale di Firenze, codice Palatino 577) derivato dal *Liber abaci*, v. [Picutti 1989: 76], benché con certe correzioni. Per decidere se sia Pacioli o l'intermediario anonimo (che Picutti identifica in modo ipotetico con Benedetto da Firenze) ad avere corretto Leonardo occorre esaminare il manoscritto.

si tratta di una correzione dovuta alla completa comprensione dell'errore, ma dell'uso di un originale migliore di quello utilizzato da Gherardo e di certo diverso dalla fonte usata da Piero.

L'Europa latino-italiana ha dunque avuto conoscenza degli enigmi quasi-algebrici non soltanto tramite Abū Bakr/Gherardo e Savasorda ma anche per via di ispirazioni fino ad oggi non identificate – ispirazioni che si riflettono almeno nel lavoro di Piero, nella seconda parte della *Summa de arithmetica* e, probabilmente, anche nella *Pratica* di Leonardo. Evidentemente ci resta tanto da imparare sui rapporti fra la tradizione italiana e quella del Mediterraneo islamico, come ci resta molto da imparare sulle tradizioni sotto-scientifiche del mondo islamico stesso, tradizioni di rado considerate veramente degne di interesse da parte degli storici della matematica.

Bibliografia

Arrighi, Gino (a cura di), 1970. Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*. Dal codice ashburnhamiano 280 (359*–291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze. (Testimonianze di storia della scienza, 6). Pisa: Domus Galileana.

Arrighi, Gino (a cura di), 1973. *Libro d'abaco*. Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca. Lucca: Cassa di Risparmio di Lucca.

Arrighi, Gino (a cura di), 1989. "Maestro Umbro (sec. XIII), *Livero de l'abbecho*. (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze). Con introduzione". *Bolletino della Deputazione di Storia Patria per l'Umbria* **86** (1989), 5–140.

Baqir, Taha, 1951. "Some More Mathematical Texts from Tell Harmal". *Sumer* **7**, 28–45.

Beaujouan, Guy, 1963. "Calcul d'expert, en 1391, sur le chantier du Dôme de Milan". *Le Moyen Age* **69**, 555–563.

Boncompagni, Baldassare (a cura di), 1857. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il *Liber abaci* di Leonardo Pisano. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Boncompagni, Baldassare (a cura di), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle

Scienze Matematiche e Fisiche.

Boyaval, B., 1971. "Le P. Ifao 88: Problèmes de conversion monétaire". *Zeitschrift für Papyrologie und Epigraphik* **7**, 165–168, Tafel VI.

Busard, H. L. L. (a cura di), 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le «Liber mensurationum» d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril-Juin 1968, 65–125.

Christianidis, Jean, 1994. "On the History of Indeterminate Problems of the Fist degree in Greek Mathematics", pp. 237–247 *in* Kostas Gavroglu, Jean Christianidis & Efthymois Nicolaidis (a cura di), *Trends in the Historiography of Science*. (Boston Studies in the Philosophy of Science, 151). Dordrecht etc.: Kluwer.

Eneström, Georg, 1913. "Das Bruchrechnen des Nemorarius". *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge **14** (1913–14), 41–54.

Folkerts, Menso (a cura di), 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung.

Heath, Thomas L., 1921. *A History of Greek Mathematics*. 2 vols. Oxford: The Clarendon Press.

Heiberg, J. L. (cura, trad.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV). Leipzig: Teubner.

Hermelink, Heinrich, 1978. "Arabic Recreational Mathematics as a Mirror of Age-Old Cultural Relations Between Eastern and Western Civilizations", pp. 44–52 *in* A. Y. al-Hassan, Ghada Karmi & Nizar Namnum (a cura di), *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science, April 5–12, 1976*. Vol. II, Papers in European Languages. Aleppo: Institute for the History of Arabic Science, Aleppo University.

Horiuchi, Annick, 1994. *Les mathématiques japonaise à l'époque d'Edo (1600–1868): Une étude des travaux de Seki Takakazu (?–1708) et de Takebe Katahiro (1664–1739)*. Paris: J. Vrin.

Høyrup, Jens, 1984. "Formative Conditions for the Development of Mathematics in Medieval Islam". Contribution to the George Sarton Centennial, University of Ghent, 14–17 November 1984. Preliminary version. Roskilde: Roskilde University Centre, Institute of Educational Research, Media Studies and THeory of Science.

Høyrup, Jens, 1988. "Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator: an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure". *Archive for History of Exact Sciences* **38**, 307–363.

Høyrup, Jens, 1990. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* **17**, 27–69, 262–354.

Høyrup, Jens, 1990a. "Sub-Scientific Mathematics. Observations on a Pre-Modern Phenomenon". *History of Science* **28**, 63–86.

Høyrup, Jens, 1990b. "*Dýnamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* **17**, 201–222.

Høyrup, Jens, 1990c. "On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions". *Centaurus* **33**, 293–324.

Høyrup, Jens, 1995. "Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata". *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* **15**, 3–14.

Høyrup, Jens, 1996. "'The Four Sides and the Area'. Oblique Light on the Prehistory of Algebra", pp. 45–65 *in* Ronald Calinger (a cura di), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*. Washington, DC: Mathematical Association of America. [Contiene molti errori di stampa, dacché l'editore non ha fatto correggere le bozze.]

Høyrup, Jens, 1996a. "The Finer Structure of the Old Babylonian Mathematical Corpus. Elements of Classification, with some Results". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række. *Preprints og Reprints*, 1996 nr. 4.

Høyrup, Jens, 1996b. "Hero, Ps-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An Investigation of *Metrica, Geometrica*, and other Treatises". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række. *Preprints og Reprints*, 1996 nr. 5.

Høyrup, Jens, 1996c. "«Les quatre côtés et l'aire» – sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes traditions mathématiques savantes", pp. 192–224 *in* E. Gallo, L. Giacardi & C. S. Roero (a cura di), *Associazione Subalpina Mathesis. Seminario di Storia delle Matematiche "Tullio Viola". Conferenze e Seminari 1995–1996*. Torino: Associazione Subalpina Mathesis.

Høyrup, Jens, 1996d. "A Note on Hero and Ancient Approximations". *Manoscritto*.

Høyrup, Jens, 1997. "Mathematics, Practical and Recreational", in corso di pubblicazione *in* Helaine Selin (a cura di), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Dordrecht: Kluwers, 1997.

Koch, Ludovica, 1995. "«Fiamma da fiamma s'infiamma». Sulle domande, sui silenzi e sulla teoria della conoscenza nell'epica germanica". *Studi Germanici*, n.s. **30–31** (1992–1993; ma 1995), 9–43.

Krasnova, S. A. (cura, trad.), 1966. "Abu-l-Vafa al-Buzdžani, *Kniga o tom, čto neobxodimo remeslenniku iz geometričeskix postroenij*", pp. 42–140 *in* A. T. Grigor'jan & A. P. Juškevič (a cura di), 1966. *Fiziko-matematičeskie nauki v stranax vostoka*. Sbornik statej i publikacij. Vypusk I (IV). Moskva: Izdatel'stvo »Nauka«.

Mahoney, Michael S., 1972. "Hero of Alexandria: Mathematics", *in Dictionary of Scientific Biography* VI, 314–315. New York: Scribner.

Martzloff, Jean-Claude, 1988. *Historie des mathématiques chinoises*. Paris: Masson.

Mušarrafa, 'Alī Muṣtafā, & Muḥammad Mursī Aḥmad (a cura di), 1939. al-Khwārizmī, *Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābalah*. Caïro, 1939. Restampa 1968.

Neugebauer, O. (cura, trad.), 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. 3 vol. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

Ong, Walter J., 1982. *Orality and Literacy. The Technologizing of the Word*. London & New York: Methuen.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino. [1]1494.

Peet, T. Eric (cura, trad.), 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. Introduction, Transcription, Translation and Commentary. London: University Press of Liverpool.

Picutti, Ettore, 1989. "Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli". *Le Scienze* **40**:246 (febbraio 1989), 72–79.

Russo, Antonio (cura, trad.), 1973. Aristotele, *Opere*, volume sesto, *Metafisica*. Roma & Bari: Laterza.

Schöne, Hermann (cura, trad.), 1903. Herons von Alexandria *Vermessungslehre* und *Dioptra*. Griechisch und deutsch. (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, vol. III). Leipzig: Teubner.

Shelby, Lon R. (cura, trad.), 1977. *Gothic Design Techniques. The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer*. Carbondale & Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Soubeyran, Denis (cura, trad.), 1984. "Textes mathématiques de Mari". *Revue d'Assyriologie* **78**, 19–48.

Souissi, Mohamed (cura, trad.), 1988. Qalaṣādī, *Kašf al-asrār 'an 'ilm ḥurūf al-ġubār*. Carthage: Maison Arabe du Livre.

Suter, Heinrich (cura, trad.), 1910. "Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil al-Miṣrī". *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge **11**, 100–120.

Thompson, Stith, 1946. *The Folktale*. New York: The Dryden Press.

Tropfke, J./Vogel, Kurt, et al, 1980. *Geschichte der Elementarmathematik*. 4. Auflage. Band 1: *Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin & New York: W. de Gruyter.

van der Waerden, B. L., 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin etc: Springer Verlag.

Vogel, Kurt (cura, trad.), 1968. *Chiu chang suan shu. Neun Bücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.)*. (Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften. Neue Folge, Band 4). Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Vogel, Kurt (cura, trad.), 1977. *Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A13)*. (Veröffentlichungen des Deutschen Museums für die Geschichte der Wissenschaften und der Technik. Reihe C, Quellentexte und Übersetzungen, Nr. 33). München.

Vogel, Kurt, 1982. "Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche". *Sudhoffs Archiv* **66**, 1–19.

von Soden, Wolfram, 1952. "Zu den mathematischen Aufgabentexten vom Tell Harmal". *Sumer* **8**, 49–56.

Winter, J. G. (cura, trad.), 1936. *Michigan Papyri*. Vol. III. *Miscellaneous Papyri*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

ISSN 0902-901X