ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Institut for Uddannelses-forskning, Medieforskning og Videnskabsteori

ROSKILDE UNIVERSITY CENTRE
Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science

FILOSOFI OG VIDENSKABS-TEORI PÅ ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

3. Række: Preprints og reprints
1987 Nr. 3

ZUR FRÜHGESCHICHTE ALGEBRAISCHER DENK-WEISEN

Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra

Von JENS HØYRUP

ZUR FRÜHGESCHICHTE ALGEBRAISCHER DENK-WEISEN

Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra

Von JENS HØYRUP

HANS WUSSING
ZUM SECHZIGSTEN
GEBURTSTAG ZUGEEIGNET

Das Folgende ist eine erweiterte Fassung meines Beitrags zur Tagung *Geschichte der Algebra*, Universität Essen, 25.-27. Juni 1987. Ich danke am herzlichsten Dr. Erhard Scholz, Bergische Universität/Gesamthochschule Wuppertal, und Professor Dr. N. Knoche, Universität/Gesamthochschule Essen, sowohl für das Organisieren der Tagung, als auch für die Einladung. Ich danke auch Professor Knoche für sehr anregende Fragen nach meinem Vortrag (ohne die das Folgende um etwa 25% kürzer geworden wäre), und Dr. Erhard Scholz für umfassende schriftliche Kommentare und Fragen. Endlich ist es mir eine liebe Pflicht, Dr. Bernhelm Booß-Bavnbek, Universität Roskilde, für mehrmalige sprachliche Beratung meine Dankbarkeit auszudrücken.

Kopenhagen, November 1987

INHALT

FRÜHES ALGEBRAISCHES DENKEN: NOTWENDIGE VORBEMERKUNGEN ZUM BEGRIFF

»Geschichte der Algebra« seit der Vorantike: Gab es denn seit 4000 Jahren ein abgegrenztes und als abgegrenzt anerkanntes Ding *Algebra*? Sicherlich nicht. Oder gab es wenigstens etwas, das, obwohl nicht als Algebra und vielleicht nicht mal als »Ding« anerkannt, sich doch über die Jahrhunderte zur heutigen Algebra entwickelte—also eine »Geschichte der algebraischen Denkweise«? Auch das nicht, schon weil es kaum heute *eine* einfach abgrenzbare »algebraische Denkweise« gibt: »Algebra« deckt die Praxis der Lösung arithmetischer Gleichungen; sie deckt aber vielmehr die *Theorie* solcher Gleichungen und ihrer Lösbarkeit; unter Mathematikern schließlich deckt sie heute hauptsächlich die *Generalisierung* solcher Theorien, d.h. die Gruppentheorie und ihre vielen Extensionen. Diese Bedeutungen sind natürlich (wenigstens paarweise) verwandt, sind aber kaum durch *einen* Begriff zu erklären. Vielmehr muß man von einer Familie gegenseitig abhängiger *algebraischer Denkweisen und Methoden* sprechen. Aus der *Geschichte der Algebra* wird dadurch eine *Geschichte algebraischer Denkweisen*, deren gegenwärtige Verflechtung unseren offenen Algebrabegriff ausmacht.

In dem Maße, wie wir die Geschichte rückwärts verfolgen, löst sich diese Verflechtung allmählich auf. So steht die ganze Klassifizierung irrationaler Größen im 10. Buch der *Elemente* und die Erforschung ihrer Inversion geistig der modernen Gruppentheorie sehr nahe; sie hat aber kaum irgendeine Verbindung mit der *Arithmetica* Diophants, deren *Gleichungslösung mit Elementen impliziter Gleichungstheorie* ebensogern als algebraisch betrachtet werden kann—geschweige denn mit der *al-jabr* des al-Khwārizmī, die uns den Namen der Disziplin gegeben hat[1].

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit algebraischen Denkweisen in vorgriechischen Traditionen, besonders im frühen Babylonien, und in den »subwissenschaftlichen« Praktikertraditionen, die mit der griechischen »wissenschaftlichen« Mathematik gleichzeitig sind, ohne davon viel geprägt zu sein.

---

[1] Die Vielseitigkeit und Undefinierbarkeit der »algebraischen Denkweisen« und die Auflösung ihrer garantierten Verbindung im Mittelalter und in der Antike erklären die vielen Auseinandersetzungen über den algebraischen Charakter dieses oder jenes Gebietes (sei es babylonische »Algebra«, diophantische »Arithmetik« oder griechische »geometrische Algebra«), macht sie aber auf der anderen Seite auch ziemlich sinn- und zwecklos.

Zuerst aber ein Wort über die Begriffe »wissenschaftlich« und »subwissenschaftlich«. Sie beschreiben eine *Orientierung des Wissens* und sind keine Qualitätsurteile. »Wissenschaftlich« ist eine systematische Verfolgung von Wissen *um des Wissens willen* über die Ebene des Alltagswissens hinaus (inhaltlich oder in seinem inneren Zusammenhang)—»theoretisches« (d.h. »betrachtendes«) Wissen im griechischen Sinne, *know-why* mit einem Ausdruck aus moderner Zeit; sie wird sich notwendigerweise bemühen, das Wissen so weit wie möglich explizit zu machen. »Subwissenschaftlich« ist die Erwerbung und Tradierung von Spezialistenwissen *um seiner Brauchbarkeit willen*; die Griechen würden von einer *Techne* sprechen, das 20. Jahrhundert von *know-how*. Im Prinzip darf das Wissen einer subwissenschaftlichen Tradition implizit bleiben, obwohl natürlich die Umstände des Anlernens der »Lehrlinge« wenigstens eine orale Explizitierung von vielem hervorzwingt (umgekehrt mag auch vieles innerhalb einer wissenschaftlichen Tradition in der Praxis implizit, weil völlig unproblematisch, bleiben)[2].

Unmittelbar möchte man annehmen, daß die Unterscheidung mit der Unterscheidung zwischen »reinem« und »angewandtem« Wissen identisch sei. Das stimmt nicht ganz. Erstens mag selbstverständlich »theoretisches« Wissen sehr anwendbar sein, obwohl es um seiner selbst willen erworben wurde—es gibt bekanntlich »nichts praktischeres als eine Theorie«[3]. Zweitens, und weniger diskutiert, gibt es auch »reine« Auswüchse der subwissenschaftlichen Traditionen—besonders auffällig im Gebiet der subwissenschaftlichen Mathematik. Sie gehen unter den Namen von »Scherzaufgaben« oder »Unterhaltungsmathematik«.

Andererseits sind »wissenschaftliche reine Mathematik« und »subwissenschaftliche reine Mathematik« in dem Ursprung ihrer Fragen völlig verschieden. Als Paradigma der ersten kann man nochmals das 10. Buch der *Elemente* in Zusammenhang mit der voreuklidischen Geschichte der griechischen Irrationalitätstheorie erwähnen. Die Entdeckung der Inkommensurabilität führte zur Formulierung bisher ungeahnter Fragen: Wie kann man Strecken konstruieren, die mit einer gegebenen Strecke (oder deren Quadrat mit einem gegebenen Quadrat) inkommen-

[2] Aus dieser Definition folgt, daß »wissenschaftliches Wissen« gegebenenfalls weniger inhaltreich und schlechter organisiert sein mag als »subwissenschaftliches Wissen«—man vergleiche z. B. Nikomachos' ziemlich triviale neupythagoreische Arithmetik mit der babylonischen »Algebra«, die unten beschrieben wird.

[3] Nach der Entstehung der Ingenieurwissenschaften im 19. Jahrhundert und der Verwissenschaftlichung vieler sozialer Praktiken im 20. Jahrhundert wird deshalb auch die Distinktion ziemlich sinnlos. Ihre Rolle ist, die Andersartigkeit früherer Wissensorganisationen verständlich zu machen.

surabel sind? Welche Arten von Größen gibt es denn überhaupt? Und wie verhalten sie sich zueinander? Die ersten zwei Fragen werden schon in Platons *Theaitetos*[4] bearbeitet; alle drei liegen hinter der Euklidischen Irrationalitätstheorie. Die Entwicklung *theoretischer reiner Mathematik* entsteht also als *Antwort auf offene Fragen*; um diese Antwort möglich zu machen, müssen oft (wie auch im eben erwähnten Beispiel) neue Methoden und Begriffe geschaffen werden.

Dieses Verhältnis von Methode und Frage wird in der »subwissenschaftlichen reinen Mathematik«, d.h. in der Unterhaltungsmathematik, umgekehrt. Hier werden *schon vorhandene Methoden* ausgenutzt, um zu zeigen, was man damit alles machen kann—*auch über das Notwendige hinaus*. Der Zweck ist, bei anderen Erstaunen oder Bewunderung oder bei sich das Gefühl eigener Geistesstärke zu wecken; dem Schüler professionelles Selbstbewußtsein einzuflößen; oder seine Fähigkeit in der Ausübung seiner Profession nachzuprüfen: Mit einem Wort, *Virtuosität* vorzuführen[5]. Um dieses Zwecks willen werden Probleme aufgesucht, die mit den vorhandenen Methoden zwar lösbar sind, aber virtuose Beherrschung dieser Methoden fordern[6].

Da die Aufgaben des praktischen professionellen Alltags dem geübten Praktiker schnell trivial werden, führt der Bedarf an Vorwänden für Virtuosität zur Konstruktion von Problemen jenseits des Praktischen, d.h. zur Entwicklung einer nichtanwendbaren, »reinen« Mathematik, deren Aufbau aber von ihren Methoden und nicht von ihren Problemen bestimmt wird.

Systematisch betriebene »Wissenschaft« in diesem Sinn ist eine Errungenschaft der griechischen Antike und forderte wohl in ihrem Anfang das besondere geistige Klima der griechischen Kultur mit ihrer Kopplung von Rationalität, Hochachtung für zivilisierte Muße und Verachtung für die niedrigeren Professionen. Die »Wissenschaften« der Bronzezeitkulturen wurden von

[4] 147c7–148d7 (ed., transl. Fowler 1977). Was Theodoros da macht, ist von der ersten Frage inspiriert, während der junge Theaitetos (als erster, muß man nach dem Text glauben) die zweite angreift.

[5] Das wird ganz deutlich von Christoph Rudolff in *Künstliche rechnung mit der ziffer* ... (1540) erklärt. Das Kapitel "Schimpfrechnung" beginnt mit der Erklärung, wie »Durch rechnung, *auch nit on sonders auffmercken der unwissenden*, zu ergründen wieuil einer pfenning, creutzer, groschen oder ander müntz vo: im ligen habe ...« (hervorhebung JH).

[6] Es ist charakteristisch, daß die Sammlung arithmetischer Epigramme im XIV. Buch der spätantiken *Anthologia graeca* sowohl Aufgaben unterhaltungsmathematischer Art wie eigentliche, nichtmathematische Rätsel einschließt (ed. Paton 1979: V, 25–107).

den praktischen Professionen getragen und waren daher von subwissenschaftlichem Charakter. Das gilt auch für die Mathematik der babylonischen und ägyptischen Schreiber und Schreiberschulen—und gilt für diese auch im Sinne, daß ihre »reine« Ebene von ihren vorhandenen Methoden und nicht von theoretischer Erforschung zentraler Probleme bestimmt wurde.

Es versteht sich unter diesen Umständen fast von selbst, daß die einzige in der Bronzezeitmathematik spürbare Art algebraischer Denkweisen die problem*lösende* ist und daß kein Interesse an Lösbarkeits- oder Strukturtheorien sich uns zeigt. Man findet in der babylonischen Mathematik viele Gleichungen, und auch (wie sich unten zeigen wird) viele begründete Auflösungen von Gleichungen—vielleicht auch explizite Erwähnung bestimmter Methoden. Man findet aber weder hier, noch in den ägyptischen Quellen oder in der späteren Unterhaltungsmathematik irgendwelche Spur von Gleichungs*theorie*.

Ein Lieblingsverfahren für die Konstruktion komplizierter Aufgaben war die »Umkehrmethode«: Eine Aufgabe aus dem praktischen Gebiet wurde genommen; statt einer der im Alltag bekannten Größen wurde aber das Resultat als bekannt angenommen—im einfachsten Fall waren also Länge und Fläche eines rechteckigen Feldes statt Länge und Breite bekannt. Die Lösung folgte dann (jedenfalls in den komplizierteren Fällen) durch Verwendung einer »analytischen« Methode[7]: Die unbekannte Größe wurde als ganz normale Größe angesehen, und mit ihr wurde wie mit anderen Größen umgegangen, bis sie aus ihrer Verknüpfung mit anderen Größen herausgelöst war. Das ist genau, was man auch jetzt bei der Auflösung einer arithmetischen Gleichung macht; damit wird wohl mit Recht seit Viète diese analytische Methode als zentrale »algebraische Denkweise« angesehen.

---

[7] Der Name und die Definition gehen auf die griechische Mathematik zurück. Siehe die Einleitung zum 7. Buch von Pappos' *Collectio* (ed. Hultsch 1876, transl. Ver Eecke 1933).

Die frühesten belegten Beispiele von Umkehr praktischer Aufgaben sind sumerisch und gehen auf die Mitte des 3. Jahrtausends zurück. Sie bauen auf umgekehrten Multiplikationen und berechnen z. B. aus einer Gesamtversorgung von 1152000 *sila* Gerste (1 *sila* ≈ liter) und einer Tagesration eines Arbeiters von 7 *sila* die Anzahl der Arbeitstage (nämlich 164571 Tage mit einem Rest von 3 *sila*), oder aus der bekannten Fläche und Breite die unbekannte Länge eines rechteckigen Feldes. Darin liegt schon ein möglicher rudimentärer Ansatz für die spätere analytische Methode; erstens aber nur ein *rudimentärer* Ansatz und zweitens (weil die Texte nur wenige und zweifelhafte Spuren der Denkart verraten) höchstens ein *möglicher* Ansatz[8]. Interessant und in Details verfolgbar wird erst die altbabylonische »Algebra«.

Die altbabylonische Periode geht von etwa 1900 v. u. Z. bis etwa 1600 v. u. Z., und die »algebraischen« Texte stammen etwa aus der zweiten Hälfte dieser Periode. Sie lösen schon von Anfang an komplizierte Aufgaben zweiten Grades und mögen deshalb auf eine ältere Tradition bauen; eine solche ist jedoch nicht belegt, und ihre Existenz ist durchaus hypothetisch. Wir werden deshalb wie die Quellen *in medias res* anfangen.

Die altbabylonische »Algebra« wurde seit ihrer Entdeckung um 1930 als »arithmetisch« angesehen: D.h., es wurde angenommen, daß die darin vorfindlichen Größen als *Zahlen* verstanden wurden; daß ihre Verknüpfungen als arithmetische Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen betrachtet wurden; und daß die bei der Auflösung verwendeten Operationen ebenfalls als reine Zahlenoperationen angesehen wurden. Eine genaue inhaltliche, philologische und strukturelle Analyse der Texte zeigt jedoch, daß diese Interpretation nicht korrekt sein kann. Zum Beispiel gibt es mehrere additive Operationen, mehrere subtraktive Operationen und mehrere scheinbar multiplikative Operationen, die streng auseinandergehalten werden, und sich deshalb nicht einfach als synonyme Terme verstehen lassen (Beispiele werden unten gegeben). Die Gesamtargumentation fordert komparative Wort-für-Wort-Analyse vieler Texte und läßt sich

---

[8] Die etwa 2500 v. u. Z. datierbare Gersteaufgabe, wo ein Fehler in einem von zwei Parallel-exemplare das Verfahren hervortreten läßt, wird in meinem [1982] nach Methode und Denkart analysiert. In diesen Fall zumindest ist die Methode nur im rudimentärsten Sinn analytisch, eher eine gestufte Abzählung. Andere Aufgaben aus dem 3. Jahrtausend wurden von Powell (1976) übersetzt und inhaltlich diskutiert.

nicht in den hiesigen Rahmen durchführen[9]. Stattdessen müssen wir uns mit einer Übersicht über die Hauptresultate und mit einigen typischen Beispielen begnügen.

Ein einfacher Text[10] läuft wie folgt in wörtlicher Überset-zung:

1. *Die Fläche und das Entgegengestellte habe ich zusammengelegt: 0;45 ist es.*
2. *1 das Herausragende setzt Du.*
3. *Den halben Teil von 1 brichst Du entzwei, 0;30 und 0;30 läßt Du einander [wie zusammenstoßende Seiten eines Rechteckes] halten,*
4. *0;15 fügst Du zu 0;45 hinzu: 1 macht 1 gleichseitig.*
5. *0;30, das Du [einen Rechteck] halten gelassen hast, reißt Du vom Leibe von 1 heraus: 0;30 ist das Entgegengestellte.*

Fast jedes Wort muß hier erklärt werden. Erstens die Zahlen. Die Babylonier verwendeten in ihren mathematischen Texten ein Stellenwertsystem mit Grundzahl 60 (ein »Sexagesimalsystem«) ohne Null und ohne Angabe von absolutem Stellenwert (dem Zahlsystem eines Rechenschiebers in letzterer Hinsicht also ähnlich). Der Verständlichkeit halber werden in der Transkription sowohl die fehlenden Nullen, als auch die absolute Größenordnung angegeben; die Notation *a,b,c;d,e,f,...* soll demnach $a \cdot 60^2 + b \cdot 60^1 + c \cdot 60^0 + d \cdot 60^{-1} + e \cdot 60^{-2} + f \cdot 60^{-3} + \ldots$ bedeuten; *0;30* steht also für $^1/_2$, und *0;15* für $^1/_4$.

Zweitens die Fachterminologie. Das »Entgegengestellte« (*mitḫartum*) bedeutet als Figur ein Quadrat; seine Zahlengröße aber ist die Länge der Quadratseite (die ja ihresgleichen entgegengestellt wird). Wir können es als *einen* Begriff verstehen, wenn wir es als *Quadrat, bestimmt von* (und deshalb auch mehr oder weniger *begriffen als*) *seiner charakteristischen Seite*, auffassen—wie *wir* heute das Quadrat als *Flächenmaß und Fläche zugleich* bestimmen und begreifen.

»Zusammenlegen« (*kamārum*) ist eine symmetrische additive Operation, wo beide Addenden in ihre Summe aufgehen. Ver-

---

[9] Ein vorläufiger und wenig überschaubarer Bericht über die Untersuchung ist mein [1985]. Eine bessere Präsentation wird sich in meinem [1987] finden.

[10] Aufgabe Nr. 1 auf der Tafel BM 13901. Publiziert in MKT III, S. 1. Die Übersetzung ist (wie alle folgenden, wo nichts anderes gesagt wird) meine eigene. Die Numerierung ist hinzugefügt; sie ist mit der Linienzählung nicht identisch.

mutlich muß sie öfters als eigentlich arithmetische Addition von Meßzahlen verstanden werden.

»Das Herausragende« (*wāṣītum*) ist ein architektonisch-geometrischer Begriff. In diesem Zusammenhang bezeichnet es eine geometrische Breite von *1*, die, wenn sie an eine Strecke x angelegt wird, daraus eine rechteckige Fläche $x \cdot 1 = x$ macht.

Der Sinn von »setzen« (*šakānum*) ist nicht ganz klar, und das Wort scheint nicht ganz eindeutig zu sein. Das »Setzen« einer Größe dürfte jedoch immer ein materielles Festhalten sein, u.a. durch Eintragung in Ton (aber auch andere materielle Repräsentation scheint möglich zu sein). Festhalten *im Gedächtnis* wird dagegen als »den Kopf halten lassen« bezeichnet.

»Entzweibrechen« (*ḫîpum*) ist eine Operation, die eine konkrete Größe in zwei gleiche, ebenfalls konkrete »halbe Teile« (*bāmtum*) teilt oder (wie hier) aus einer Größe einen der »halben Teile« abtrennt.

»Einander [wie zusammenstoßende Seiten eines Rechteckes] halten lassen« ist eine etymologisch nicht ganz gesicherte Übersetzung von der kausativ-reziproken Verbalform *šutākulum*. Inhaltlich »halten« jedenfalls *a* und *b* einander, wenn ein Rechteck mit zusammenstoßenden Seiten *a* und *b* »gebaut« (*banûm*), d.h. konstruiert wird[11].

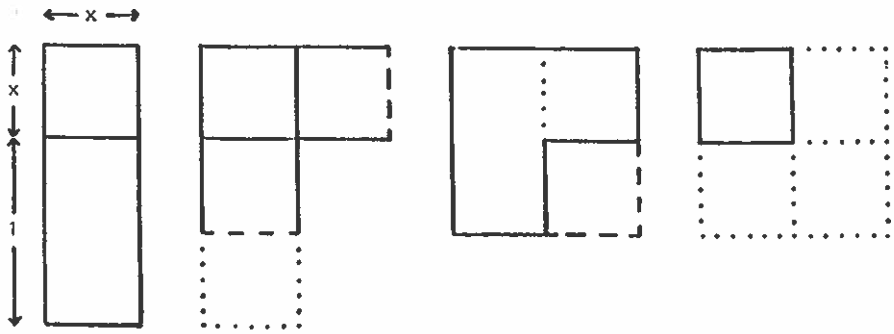
»Hinzufügen« (*waṣābum*) ist eine asymmetrische additive (oder eher quasi-additive) Operation, wo unter Hinzufügung der konkreten Größe *b* an die ebenfalls konkrete Größe *a* die Identität letzterer bewahrt wird (wie die Identität eines Kapitals trotz Hinzufügung von Zinsen bewahrt wird—Zinsen, die übrigens auf babylonisch genau »das Hinzugefügte« heißen).

»Gleichseitig machen« (íb-si$_8$) ist eine Wurzelausziehungsoperation auf geometrischer Grundlage. »Das Gleichseitige« kann wie »das Entgegengestellte« das mit seiner Seite identifizierte Quadrat bedeuten. Der Satz »*A* macht *b* gleichseitig« bedeutet also, daß die Fläche *A* als Quadrat vorkommend die Seite *b* hat, d.h. $\sqrt{A} = b$.

»Herausreißen« (*nasāḫum*) ist die subtraktive Umkehroperation von »Hinzufügen«, also ein konkretes Wegnehmen, worunter die Identität der zu vermindernden Größe bewahrt wird. Der Ausdruck »vom Leibe« (*libba*, eigentlich »Herz« oder »Eingeweide«) zeigt, daß die zu vermindernde Größe eine sehr kon-

---

[11] Ein irreguläres Viereck kann jedoch auch von zwei *entgegengestellten* Seiten »gehalten« werden. Das ist geometrisch einleuchtend, obwohl in diesem Fall natürlich die Figur nicht dadurch eindeutig bestimmt wird. Von »multiplikativem« Prozeß ist selbstverständlich dann überhaupt keine Rede mehr.



FIGUR 1. Der Lösungsvorgang in BM 13901 Nr. 1, »Quadratfläche+Seite=0;45«.

krete Fülle besitzt und deswegen keine abstrakte Zahl sein kann.

Die Aufgabe handelt also von einem Quadrat, wo die Summe der Meßzahlen von Fläche und Seite gleich $^3/_4$ ist. Die Seite (»das Entgegengestellte«) wird zuerst mit einer »herausragenden« Breite *1* versorgt, so daß sie in ein Rechteck verwandelt wird. Damit ermöglicht sich der Rechner eine geometrische Interpretation des Zusammenlegens (siehe Figur 1) und schafft sich eine Unterlage für ein analytisches Verfahren.

Die geometrische Summe ($=^3/_4$) ist nämlich aus einem Quadrat und einem Rechteck zusammengesetzt, wobei die Länge des letzteren als *1* bekannt ist und seine Breite gleich der Seite des Quadrates. Die ganze Figur kann deshalb nach Zerschneidung in einen Gnomon umgelegt werden, wo das fehlende Quadrat von den zwei »halben Teilen« der »Herausragenden« *1* gehalten wird und daher als $^1/_2 \cdot ^1/_2 = ^1/_4$ bekannt ist. Wird es hinzugefügt, ist die Fläche des ergänzten Quadrates $^3/_4 = 1$, und seine Seite also $\sqrt{1} = 1$. Wird der hinzugefügte »halbe Teil« wieder weggenommen, bleibt die Seite des ursprünglichen Quadrates, das »Entgegengestellte«.

Das ist genau das Verfahren, das im Text beschrieben wird. Seine Korrektheit ist intuitiv ganz einleuchtend, wird aber nicht ausdrücklich kommentiert. Da die Figur trotz ihrer unbekannten Breite in der ganzen Operation als *ganz konkret vorhanden* behandelt wird, ist der analytische Charakter des Verfahrens außer Zweifel—man könnte mit einem gewissen Recht von *naiver geometrischer Analyse* sprechen (»naiv«, weil die bloße Möglichkeit des Anzweifelns abwesend ist).

Außerdem wird man bemerken, daß der Text zwischen einer geometrischen Größe und ihrer Meßzahl keinen Unterschied macht; besonders auffallend ist die Konstruktion des Ergänzungsquadrates, das dann einfach als *0;15* bezeichnet wird. Andere Texte gehen noch weiter und zeigen uns ganz klar, daß die Meßzahlen im Unterricht als *identifizierende Namen* verwendet wurden—also »dieses *0;30*«, wo wir in derselben Absicht von »der Strecke *AB*« oder »der Länge *x*« reden würden. Das ist problemlos, so lange nur bekannte Größen so identifiziert werden; in Fällen, wo mehrere Größen numerisch gleich sind, wird weitere Identifikation durch Hinweise auf die frühere Rolle der einzelnen Größe geschaffen (wie das »*0;30*, das Du halten gelassen hast« unseres Textes). Schließlich gibt es sogar noch Fälle, wo eine im Prinzip unbekannte Größe mit ihrer Meßzahl bezeichnet wird, *ohne daß dieser »unbekannte« Wert jedoch im Argument benutzt wird* (und wo somit die Zahl nur die Funktion eines modernen *x* ausfüllt und ein Unterschied also zwischen der Zahl als *Name* und als *Ergebnis der Rechnungen* gemacht wird). Das wäre in einer praktisch benutzten Kalkulation ein Unding; wir müssen uns aber klar machen, daß alle (oder mindestens alle uns bekannten) »Algebra«-Texte Schultexte sind. Sie lehren *eine Methode* und lösen keine bisher ungelösten Probleme—im Gegenteil sind die Probleme so zugeschnitten, daß sie mit der zu lehrenden Methode lösbar sind[12]. Übrigens wird die Lösung, auch wenn sie nicht ausdrücklich im Text erwähnt wird, normalerweise vorher den Schülern bekannt gewesen sein—öfters wird eine und dieselbe Figur als Unterlage für eine ganze Reihe von Aufgaben benutzt. Auch das kommt uns merkwürdig vor, da wir uns das Problem im Prinzip *primär, weil noch ungelöst,* und die Methode *sekundär und dem Problem zugeschnitten* denken. Kein babylonischer Schreiber war aber je auf ein praktisches Problem zweiten Grades gestoßen; die Lösung solcher Probleme in der Schule sollte, wie oben diskutiert, nicht der kalkulierenden Praxis, sondern dem Vorzeigen oder der Übung von Virtuosität dienen.

Oft spricht man von »Gleichungen« in Verbindung mit der babylonischen »Algebra«. Der obige Text zeigt uns, in welchem Sinn das verstanden werden muß: Eine mehr oder weniger komplizierte konkrete Größe wird konstruiert und ihre Meßzahl dann angegeben; zuweilen wird es gesagt, daß eine Größe »wie«

---

[12] Das ist bei den Problemen zweiten Grades nicht immer eindeutig aus den Texten zu sehen, da die Babylonier *alle* solchen Probleme lösen konnten. Wenn man zu Problemen dritten oder höheren Grades übergeht, wird es aber unwiderruflich klar—vgl. unten.

eine andere ist, d.h., daß die Meßzahlen dieselben sind. Wenn wir das Nichtunterscheiden zwischen Größe und »Zahlenwert« so verstehen, daß Wörter wie »Länge«, »Breite« u.s.w. als »Repräsentanten« sowohl für die Größen, als auch für ihre unbekannten Werte aufzufassen sind, wird daraus in beiden Fällen eine Gleichung in fast modernem Sinn. Überall, wo im Folgenden von babylonischen »Gleichungen« gesprochen wird, sind solche Größengleichheiten gemeint.

Die Identifizierung von Größe und Meßzahl könnte weiter dazu führen (und hat gewöhnlich dazu geführt), daß der Text als ausschließlich arithmetisch gelesen wird[13]. Tut man das, entsteht der Eindruck von ganz moderner Schulalgebra. Alle Einzelschritte unseres Textes sind ja in moderne Gleichungsoperationen direkt übersetzbar:

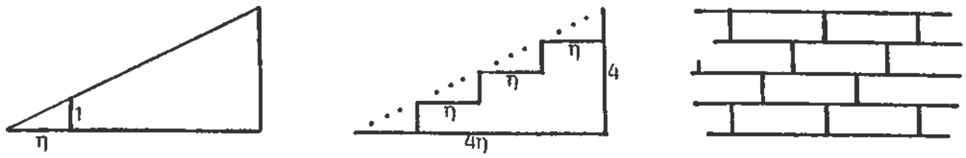
$$x^2+x={}^3/_4 \;\Rightarrow\; x^2+x\cdot 1={}^3/_4 \;\Rightarrow$$
$$x^2+2\cdot x\cdot{}^1/_2+({}^1/_2)^2={}^3/_4+{}^1/_4=1 \;\Rightarrow$$
$$(x+{}^1/_2)^2=1 \;\Rightarrow\; x+{}^1/_2=\sqrt{1}=1 \;\Rightarrow\; x=1-{}^1/_2={}^1/_2$$

Dem grundlegenden ontologischen Unterschied zwischen einer Algebra abstrakter Zahlen und einer »Algebra« gemessener Strecken zum Trotze war also letztere in diesem elementaren Fall der ersten praktisch gleichwertig und pädagogisch vielleicht überlegen. Das gilt auch in vielen komplizierten Fällen. Für solche wird jedoch für alle Koeffizientenreduktionen noch eine Operation benötigt, die sogenannte »Hebung« (*našûm*). Sie bezeichnet eine eigentliche *Berechnung einer konkreten Größe durch Multiplikation*[14], vermutlich durch irgendeine intuitive Proportionalitätsbetrachtung. Daß »heben« etwas mit Proportionalität oder Multiplikation zu tun hat, scheint uns wohl kaum einleuchtend; eine mögliche Erklärung finden wir in der Verwendung der Operation unter anderem für die Höheberech-

---

[13] Die geometrische Deutung der operativen Termini wird uns nämlich (mit Ausnahme einzelner früher nicht bemerkter bzw. nicht verstandener Worte wie *Leibe* und *Herausragende*) nur durch eine vergleichende Lesung von sehr vielen Texten aufgezwungen; eine unmittelbare Lesung des Einzeltextes könnte ebensogut arithmetisch werden, wenn nur diese isolierten Worte als überflüssig oder unverständlich übersprungen werden.

[14] Noch eine andere multiplikative Operation wird mit a-rà bezeichnet. *p* a-rà *q* (»*p* schritte von *q*«)ist eine numerische Multiplikation der Zahl *p* mit der Zahl *q*; die Operation findet sich deshalb in den Multiplikationstabellen. Gelegentlich findet man sie auch in den »algebraischen« Texten, z.B. in gewissen seltenen Fällen, wo eine rechteckige Fläche zuerst »gebaut« und ihre Meßzahl danach in einem zweiten, separaten Schritt durch Multiplikation der Meßzahlen der Seiten berechnet wird.



FIGUR 2. Wie das Erheben einer Rampe und einer Mauer als multiplikativer Prozeß aufgefaßt werden kann.

einer Rampe und die Berechnung der Ziegelanzahl einer Mauer—siehe Figur 2.

Auch die Division scheint uns notwendig für die meisten komplizierteren Algebraaufgaben. Eine eigentliche Division gibt es aber trotzdem bei den Babyloniern *nicht*. Stattdessen multiplizieren sie, wenn es möglich ist (d.h. wenn der Divisor eine Potenz von *60* teilen kann—in anderen Worten, wenn er die Form $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ hat) mit dem reziproken Wert des Divisors (sein igi genannt; den igi zu finden wird als »Abspaltung« [*paṭārum*, nämlich aus der Einheit] aufgefaßt); wenn kein igi existiert, stellt der Text die Frage »was soll ich zu *a* setzen, das mir *b* gibt?« und führt unmittelbar danach die Antwort an—daß eine Antwort immer gegeben werden kann, entweder als ganze Zahl oder in Form eines endlichen Sexagesimalbruchs, folgt aus der Konstruktion der Aufgaben aus bekannten Situationen.

Mit diesen einfachen Techniken und Operationen haben die Babylonier viele verwickelten Aufgaben gelöst. Ein charakteristisches Beispiel (auch charakteristisch, weil scheinbar aus der alltäglichen Praxis des Landmessers genommen, bei genauerem Anblick allerdings ganz künstlich) ist die Aufgabe auf der Tafel VAT 7532[15] (die Übersetzung ist nur in den mathematischen Teilen völlig wörtlich):

1. *Ein trapezformiges Feld. Ein Schilfrohr habe ich abgeschnitten und als Meßrohr genommen.*
2. *Während es ganz war, bin ich 1 Sechzig Schritte die Länge entlang gegangen.*
3. *Sein 6er Teil ist mir abgebrochen, 1,12 Schritte ließ ich auf der Länge folgen.*
4. *Weiter ist mir 1/3 des Rohres und 1/3 Elle abgebrochen, in 3 Sechzig Schritte bin ich die obere Breite gegangen.*
5. *Mit dem, was mir [zuletzt] abgebrochen ist, habe ich das Rohr wieder vergrößert, und in 36 Schritten habe ich die untere Breite durchgemacht.*
6. *Die Fläche ist 1 b u r. Was ist die ursprüngliche Länge des Rohres?*
7. *Du, bei deinem Verfahren: Das Rohr, das Du nicht kennst, setze als 1.*
8. *Seinen 6en Teil brich ab, dann bleiben dir 0;50.*
9. *Seinen i g i spalte ab, das [darauskommende] 1;12 hebe zu 1 Sechzig.*
10. *Das [darauskommende] 1,12 zu ⟨1,12⟩ füge hinzu: es gibt 2,24, die falsche Länge.*
11. *Das Rohr, das Du nicht kennst, setze als 1.*
12. *Sein 1/3 brich ab, 0;40 zu 3 Sechzig, der oberen Breite, hebe; 2,0 gibt es.*
13. *2,0 und 36, die untere Breite, lege zusammen.*
14. *2,36 zu 2,24, die falsche Länge, hebe; 6,14,24 ist die falsche Fläche.*

---

[15] Publiziert in MKT I, 294f.

15. *Verdopple bis 2-mal die Fläche, das ist 1,0,0. hebe es an 6,14,24; es gibt 6,14,24,0,0,*

16. *und 1/3 Elle, die Du abgebrochen hast, hebe zu 3 Sechzig.*

17. *Das [darauskommende] 5 hebe an 2,24, die falsche Länge; es ist 12,0.*

18. *Die Hälfte von 12,0 brich entzwei, entgegenstelle.*

19. *Füge das [darauskommende] 36,0,0 zu 6,14,24,0,0; es gibt 6,15,0,0,0.*

20. *6,15,0,0,0 macht 2,30,0 gleichseitig.*

21. *6,0, das Du zurückgelassen hast, zu 2,30,0 füge hinzu; es gibt 2,36,0.*

22. *Der igi von 6,14,24, die falsche Fläche, läßt sich nicht abspalten. Was soll ich zu 6,14,24 setzen, das 2,36,0 gibt?*

23. *Setze 0;25.*

24. *Weil der 6te Teil [...] abgebrochen ist, schreib 6, 1 lasse weggehen; 5 läßt Du zurück.*

25. *<der igi von 5 ist 0;12; 0;12 hebe zu 0;25; 0;05 gibt es>*[16]

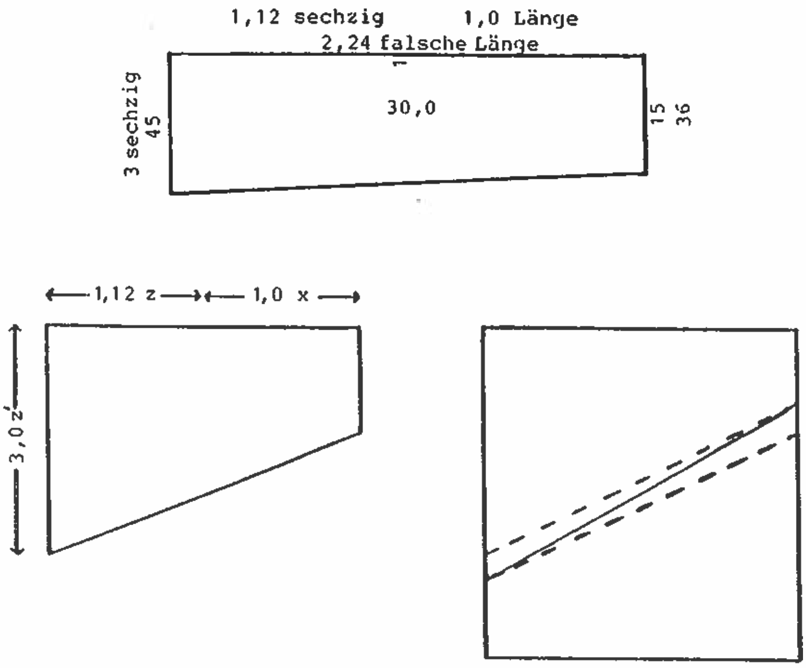
26. *0:05 zu 0;25 füge hinzu, 1/2 nindan gibt es dir als ursprüngliches Rohr.*

Die Verbindung zur (feldmesserischen) Praxis läßt sich nicht nur in der äußeren Einkleidung des Problems sehen, sondern auch in den Zahlenangaben und den Einheiten. Das »*1, Sechzig*« wird im gewöhnlichen, »absoluten« System geschrieben, nicht im Stellenwertsystem der mathematischen Texte[17]. Die Einheit aller Längen ist der nindan, der gleich 12 »Ellen« ist (letztere ist etwa 50 cm, ersterer also etwa 6 m; diese Einheit muß übrigens auch in der vorigen Aufgabe mitgedacht werden—babylonische Geometrie, auch wenn Grundlage für »Algebra«, handelt nie von abstrakten Längen). Der bur ist eine der gewöhnlichen Feldmessungseinheiten und ist gleich 30,0 nindan[2].

---

[16] Vervollständigung nach Parallelstellen in verwandten Texten.

[17] Das ist jedenfalls die natürliche Lesung. Man kann jedoch auch »*1,0, von der Größenordnung Sechzig*« lesen, wo *1,0* eine Stellenwertzahl ist (da diese einfach als *1* mit der *Eins* des absoluten Systems geschrieben wird).



FIGUR 3. Das Trapezformige Feld aus VAT 7532. Oben wie auf der Tafel gegeben (gewisse geschädigte Zahlen sind nach Paralleltexten rekonstruiert). Unten links in korrekten Proportionen. unten rechts verdoppelt.

Dieser Verbindung zum Trotze macht der ganze Gang der Aufgabe uns deutlich klar, daß wir weit von der Praxis entfernt sind und uns im Feenland der Rätsel befinden; dort nämlich—und nicht im Alltag—trifft der Feldmesser auf Probleme zweiten Grades.

Versuchen wir, dem Gang der Rechnungen zu folgen (vgl. Figur 3). In 7–9 werden die 60 Schritte mit dem ursprünglichen Rohr in *1,12* Schritte mit dem einmal gekürzten Rohr umgesetzt und die ganze Länge des Feldes demnach als *2,24* Schritte mit diesem angegeben. Das nur halbwegs explizite Argument scheint von dem Typus »einfacher falscher Ansatz« zu sein (in der Tat findet das Wort »falsch« (lul) sich ja auch im Text): Wenn das Rohr die ursprüngliche Länge *1* gehabt hätte, wäre die gekürzte Länge $1-{}^{1}/_{6}=1-0;10=0;50$. Die ganze mit dem ungekürzten Rohr durchgegangene Strecke wäre *60*, die dann mit dem gekürzten Rohr in $^{60}/_{0;50}=1,12$ Schritten durchschritten werden könnte[18].

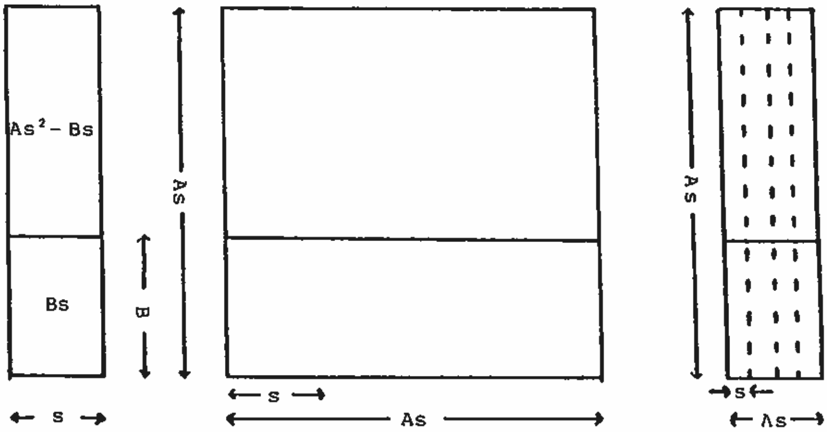
In 11 wird ein neuer Ansatz gemacht. Erstens wird nur die Kürzung von $^1/_3$ in Betracht gezogen, und die *3,0* Schritte mit dem so nochmals gekürzten Rohr werden in 12 in *2,0* Schritte mit dem einmal gekürzten umgesetzt. Eine »falsche Fläche« von $2,24\cdot(2,0+36)$ wird dann in 13–14 gefunden und zwar das Rechteck, das durch Verdoppelung des Trapezes entstehen würde, *wenn* das einmal gekürzte Rohr die Länge *1* hätte und wir von der abgebrochenen *$^1/_3$ Elle* absehen. Daß eine eigentliche physische Verdoppelung stattfindet, wird in 15 klargemacht, wo die »wahre« Fläche in ähnlicher Weise verdoppelt wird (»bis *n*-mal verdoppeln« ist eine *n*-malige konkrete Wiederholung).

Was weiter geschieht, ist nicht direkt Zeile für Zeile verfolgbar, wird aber durch Vergleich mit Standardaufgaben von ähnlicher Struktur verständlich. Es geht etwa so:

Wir betrachten das einmal gekürzte Rohr als »Entgegengestelltes«, d.h. als unbekannte Seite eines Quadrates. Wenn wir von der $^1/_3$ Elle absehen, ist die verdoppelte wahre Fläche gleich $2,24\cdot(2,0+36) = 6,14,24$ mal dieses Quadrat. Nun müssen wir aber die $^1/_3$ Elle mitdenken. Jedesmal, wenn wir mit dem zum zweitenmal gekürzten Rohr einen Schritt gemacht haben, fehlt uns $^1/_3$ Elle, alles in allem $3,0\cdot{}^1/_3$ Ellen $= 3,0\cdot{}^1/_3\cdot{}^1/_{12}$ n i n d a n $= 1,0\cdot{}^1/_{12}$ n i n d a n $= 5$ n i n d a n. Insgesamt haben wir also einen Streifen der Breite *5* n i n d a n und der Länge gleich *2,24* mal das einmal gekürzte Rohr, d.h. ein Rechteck von *12,0* n i n d a n mal die Seite des unbekannten Quadrates zu viel genommen; in Wirklichkeit ist deshalb die verdoppelte wahre Fläche nur *6,14,24* mal das unbekannte Quadrat minus *12,0* mal seine Seite (selbstverständlich mit einem »Herausragenden« von 1 n i n d a n versorgt). Als babylonische Standardaufgabe könnte man das in folgender Weise formulieren: *12,0 mal das Entgegengestellte habe ich aus 6,14,24 mal der Fläche herausgerissen: 1,0,0 ist es.*

Wir würden jetzt die ganze Gleichung mit *6,14,24* teilen, um eine normalisierte Gleichung zu erhalten. Das kann der babylonische Rechner nicht, da $6,14,24 = 2^6\cdot 3^3\cdot 13$ keinen i g i besitzt. Stattdessen betrachtet er stillschweigend *6,14,24* mal

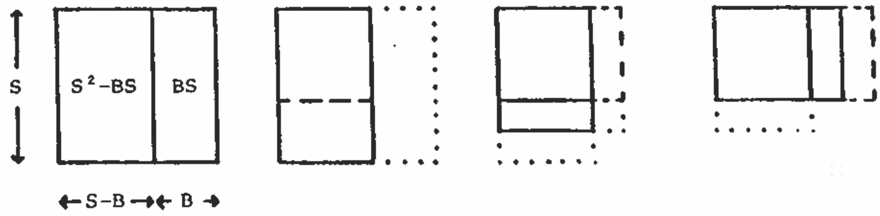
[18] Man bemerkt, daß wir hier die Repräsentation einer unbekannten Größe durch eine bekannte Zahl wiedertreffen. In diesem Fall ist allerdings der Repräsentant von dem wahren Wert der Größe verschieden. Die Methode des einfachen falschen Ansatzes kann deshalb benutzt werden, um wirkliche Probleme zu lösen (und wurde auch von praktischen Rechnern so benutzt bis zur Renaissance). Die Rolle der *1* als »*x* des armen Mannes« in einer wahrhaftig analytischen Argumentation ist unverkennbar.



FIGUR 4A. Zwei Methoden, das Problem $As^2-Bs=C$ *in* $(As)^2-B\cdot(As)=AC$ *zu verwandeln: Entweder durch Multiplikation der horizontalen Dimension mit* A *(hier 4), oder durch Multiplikation der horizontalen Meßeinheit mit* A^{-1}.

die ursprüngliche Seite als Seite eines neuen Quadrates, das dann *6,14,24* mal so groß wie das Rechteck mit einer Länge gleich *6,14,24* »Entgegengestellten« und einer Breite gleich dem »Entgegengestellten« sein muß[19]. Auch *12,0* mal die neue Seite muß *6,14,24* mal so groß sein wie *12,0* mal die ursprüngliche Seite—und also ist das neue Quadrat minus *12,0* mal seine Seite *6,14,24* mal so groß wie die ursprünglichen *1,0,0* [n i n d a n²] und somit *6,14,24,0,0* [n i n d a n²] (vgl. Figur 4a). Damit ist dann die Aufgabe auf folgende normalisierte Standardaufgabe reduziert worden: *12,0 mal das Entgegengestellte habe ich aus der Fläche herausgerissen: 6,14,24,0,0 ist es.* Sie wird mit einem geometrischen Standardverfahren gelöst—siehe Figur 4b: Die ganze Fläche von *6,14,24,0,0* (Quadrat minus *12,0* Seiten) ist ein Rechteck, dessen Länge die Breite mit *12,0* übersteigt. Dieser Überschuß wird halbiert und die äußere Hälfte so umgelegt, daß

[19] Die Vergrößerung des Quadrates könnte eine physische Vergrößerung sein; es könnte sich aber ebensowohl um eine bloße Vergrößerung der Meßzahl handeln, die aus einer Änderung der Meßeinheit (in einer der zwei Dimensionen) folgte. Letztere Möglichkeit (die geometrisch einfacher wäre, da alles dann auf derselben Figur gemacht oder gedacht werden könnte) wäre z.B. der Umrechnung in 7–10 sehr ähnlich. Aus diesem und anderen Gründen finde ich sie plausibler. (Die babylonischen Rechner waren daran gewöhnt, verschiedene Dimensionen einer Figur in verschiedenen Einheiten zu messen, weil horizontale Ausdehnungen in n i n d a n gerechnet wurden, vertikale Ausdehnung aber in Ellen).



FIGUR 4B. Die Lösung des Problems $S^2-BS=C$ *wie in VAT 7532 beschrieben.*

die zwei Stücke von *6,0* als Ecke eines Ergänzungsquadrates entgegengestellt werden. Das ergänzte Quadrat ist dann *6,14,24,0,0+36,0,0 = 15,0,0,0* und seine Seite also *30,0*. Die ursprünglich zurückgelassene Hälfte *6,0* des Überschusses wird (in 21) zur rechten Seite der zuerst umgelegten hinzugefügt, wodurch die volle Breite des verminderten Quadrates restituiert und als *36,0* gefunden wird. Diese Zahl war um einen Faktor *6,14,24* größer als das einmal verminderte Rohr, das dann (22–23) durch Division als *0;25* gefunden wird[20]. Schließlich wird mit einem letzten »falschen Ansatz« die Länge des ungekürzten Rohres als $^1/_2$ n i n d a n gefunden.

Das läßt sich natürlich viel einfacher in modernem Buchstabensymbolismus ausdrücken, *wenn man nur im Besitz dieses Symbolismus ist und damit vertraut umgeht:*

$$z={}^5/_6x \quad \text{und} \quad {}^1/_2\cdot(1,0\cdot x+1,12\cdot z)\{({}^2/_3\cdot z-{}^1/_{36})\cdot 3,0+36\cdot z\}$$
$$=30,0$$

$$\Rightarrow \quad (1,12+1,12)\cdot z\cdot\{(2,0+36)\cdot z-5\}=1,0,0 \quad \Rightarrow$$
$$2,24\cdot 2,36z^2-2,24\cdot 5z=1,0,0 \quad \Rightarrow \quad 6,14,24\cdot z^2-12,0\cdot z=1,0,0$$

Setzen wir jetzt $Z=6,14,26\cdot z$, kriegen wir

$$Z^2-12,0\cdot Z=6,14,24\cdot 1,0,0 \quad \Rightarrow \quad Z^2-12,0\cdot Z=6,14,24,0,0 \quad \Rightarrow$$
$$Z^2-2\cdot 6,0\cdot Z+(6,0)^2=6,14,24,0,0+36,0,0=6,15,0,0,0 \quad \Rightarrow$$
$$Z-6,0=\sqrt{6,15,0,0,0}=2,30,0 \quad \Rightarrow \quad Z=2,30,0+6,0=2,36,0 \quad \Rightarrow$$
$$6,14,24\cdot z=2,36,0 \quad \Rightarrow \quad z=0;25 \quad \Rightarrow$$
$$x=\{{}^6/_{(6-1)}\}z=\{{}^{[(6-1)+1]}/_{(6-1)}\}z=z+({}^1/_5)z=$$
$$0;25+0,05=0;30$$

Das Verwunderliche ist nicht, daß die babylonische Berechnung sich in algebraischen Symbolismus übersetzen läßt. Ver-

[20] Man kann bemerken, daß die geometrische Situation und die Operationen dieselben sind wie in Figur 1. Nur ist diesmal die gesuchte Größe die Länge und nicht die Breite des Rechtecks.

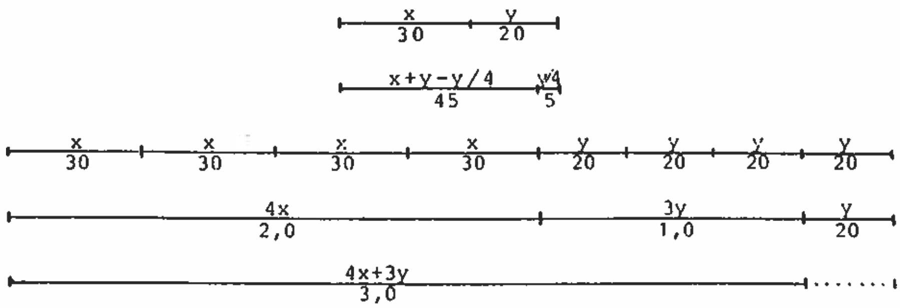
wunderlich ist es dagegen, daß diese Übersetzung der modernen Lösungsweise so nahe kommt. In der Tat haben die Babylonier mit ihrem geometrischen und sehr konkreten Gedankengang in fast denselben Schritten gearbeitet, wie wir es tun würden (abgesehen von den besonderen Schritten, die aus ihrem eigenartigen Divisionsverfahren folgen und die nicht in Symbole mitübersetzt wurden).

Die Reduktion der »Standardgleichung« zweiten Grades ist, wie wir sehen, ganz standardisiert. Dagegen scheinen die Operationen ersten Grades in ganz improvisierter Weise behandelt zu werden, meistens mit verschiedenen Varianten des einfachen »falschen Ansatzes«. Es gibt jedoch auch sehr standardisierte Behandlungen von »Gleichungen« ersten Grades. Ein Beispiel, das uns auch einen besseren Einblick in die oralen und didaktischen Aspekte des Unterrichts gibt als die meisten Texte, ist TMS XVI[21]. Der erste von zwei parallelen Teilen läuft wie folgt:

1. *Ein 4tel von der Breite ist von Länge und Breite herauszureißen, 45.*
2. *Du, hebe 45 zu 4; 3,0 siehst Du. 3,0, was ist das?*
3. *Setze 4 und 1; setze 50 und 5, das herauszureißen ist.*
4. *5 zu 4 hebe, 1 Breite.*
5. *20 zu 4 hebe; 1,20 siehst Du, 4 Breiten.*
6. *30 zu 4 hebe; 2,0 siehst Du, 4 Längen.*
7. *20, 1 Breite, die herauszureißen ist, von 1,20, die 4 Breiten, reiße heraus; 1,0 siehst Du.*
8. *2,0, die Längen, und 1,0, die 3 Breiten, lege zusammen; 3,0 siehst Du.*
9. *Den igi von 4 spalte ab; 0;15 siehst Du.*
10. *0;15 zu 2,0, die Längen, hebe; 30 siehst Du, 30 die Länge.*
11. *0;15 zu 1,0 hebe; 15 ist der Beitrag der Breite.*
12. *30 und 15 behalte (?).*
13. *Da er »ein 4tel der Breite ist herauszureißen« gesagt hat, von 4 reiße 1 heraus; 3 siehst Du.*
14. *Den igi von 4 spalte ab; 0;15 siehst Du.*
15. *0;15 zu 3 hebe; 0;45 siehst Du. 0;45 ist so viel es von Breiten gibt.*
16. *1 ist so viel es von Längen gibt.*

---

[21] Publiziert in Bruins & Rutten 1961: 92. Korrektionen, Übersetzung und Interpretation in meinem [1987:83f].



FIGUR 5. Graphische Repräsentation der Gleichungstransformation in TMS XVI A.

17. Nimm 20, die wahre Breite. Hebe 20 zu 1, 20 siehst Du.

18. 20 zu 0;45 hebe; 15 siehst Du.

19. 15 von $^{30}{}_{15}$ ziehe heraus; 30 siehst Du, 30 die Länge.

Was uns hier vorgezeigt wird, ist keine Aufgabenlösung, sondern die didaktische Erklärung der Transformation einer »Gleichung«. Wir können diese Gleichung entweder graphisch (vgl. Figur 5) oder symbolisch übersetzen—letzteres als

$$(x+y)-{}^1/_4\,y=45\ ,$$

wo x die Länge und y die Breite ist. Wie es klar wird in 3, sind die Länge schon voraus als *30*, die Breite als *20*, ihre Summe als *50* und das *4*tel der Breite als *5* bekannt. Die Transformation, die erklärt wird, ist eine Multiplikation mit *4*, die die rechte Seite in *3,0* verwandelt, nach deren konkreter Erklärung dann (in 2) gefragt wird.

Erstens werden in 3 außer den ursprünglichen Größen die Multiplikatoren *1* und *4* (für die ursprüngliche bzw. die multiplizierte »Gleichung«), die Summe *50* und das herauszureißende *5* »gesetzt«, d.h. irgendwie materiell notiert (im Gedächtnis etwas zu notieren heißt, wie wir uns erinnern, »seinen Kopf es halten zu lassen«).

In 4 bis 6 werden dann das Herauszureißende *5*, die Breite *20* und die Länge *30* mit *4* multipliziert und die herauskommenden Zahlen als jeweils *1* Breite, *4* Breiten und *4* Längen erklärt. In 7 wird das Herauszureißende *20* aus dem *1,20* gerissen, welches *1,0* zurückläßt (in 8 als *3* Breiten erklärt). In 8 sehen wir schließlich die Erklärung des *3,0* als die Summe von *2,0*, das von den *4* Längen herrührt, und *1,0*, das mit *3* Breiten identisch ist.

Die nächste Stufe kehrt jetzt alles um und multipliziert alles mit *1/4=0;15*, dem igi von *4*. *1/4* von *2,0* ist *30*, also eine Länge (10); *1/4* von *1,0* ist *15*, das dann als »Beitrag der Breite« präsentiert wird (11; im selben Sinn ist also der »Beitrag der Länge« *30*, d.h. eine Länge). Im unklar geschriebenen 12 wird der Schüler vermutlich aufgefordert, diese zwei Beiträge im Kopf zu behalten.

Der letzte Teil des Textes ist dann die Erklärung der zwei »Beiträge«. Erstens wird in 13–15 der Koeffizient der Breite (»so viel es von Breiten gibt«) als *1−1/4=1−0;15=0;45* gefunden. Von Anfang an ist es klar, daß der Koeffizient der Länge *1* ist (16). In 17 wird eine »wahre« Breite (wohl die Breite einer Figur) in die damit gleich große formal angesetzte »Breite« der hier durchgegangenen Hilfsberechnung durch Multiplikation mit *1* umgesetzt; in 18 wird diese mit ihrem Koeffizienten 0;45 multipliziert, was natürlich den »Beitrag der Breite« gibt; wenn er in 19 aus der Summe herausgerissen wird, bleibt *30*, der Beitrag der Länge, d.h. die Länge selbst.

Das kann, in Worten gesagt, ein wenig undurchsichtig vorkommen. Wir müssen es uns aber (nach dem »setze« in 3) als eine begleitende Erklärung vorstellen, während die Operationen gleichzeitig in irgendeiner materiellen Repräsentation vollzogen wurden, z.B. in einer Zeichnung im Sande des Schulhofes[22], vgl. Figur 5. Um uns in die Situation der Schüler zu setzen, kann man versuchen, dem Gang der Operationen auf dieser Figur zu folgen.

[22] Auch im elementaren Schreibunterricht wurde dieses Schreibmaterial vermutlich benutzt—vgl. Tanret 1982.

Eine Aufgabe voll zu übersetzen, wo eine Transformation der eben vorgestellten Art benutzt wird, würde zu weit führen. Stattdessen können wir eine symbolische Übersetzung der ersten Aufgabe der Tafel VAT 8520[23] betrachten—wobei man allerdings daran erinnern muß, daß der eigentliche Text konkret und geometrisch ist im selben Sinn wie die vorigen (ungeachtet, daß die unbekannten Größen hier als zusammengehörendes Zahlpaar der Reziprokentafel vorgestellt werden). In symbolisch-arithmetischer Übersetzung wird daraus folgendes:

$$x-{}^{6}/_{13}\cdot(x+y)=0,30 \quad \text{und} \quad x\cdot y=1$$

Die erste Gleichung wird nach den oben gelehrten Prinzipien mit 13 multipliziert und wird so zu

$$7x-6y=6;30\ , \quad \text{während} \quad 7x\cdot 6y=42\ .$$

Setzen wir jetzt $X=7x$, $Y=6y$, kriegen wir

$$X-Y=6;30 \quad \text{und} \quad X\cdot Y=42$$

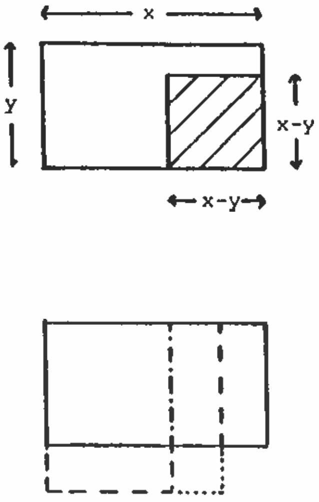
geometrisch also ein Rechteck mit bekannter Fläche, wo auch der Überschuß der Länge über die Breite bekannt ist. Diese Konfiguration kennen wir schon als Standardkonfiguration aus den ersten zwei Aufgaben (siehe Figur 1 und 3), und die Lösung $x=1;30$, $y=0;40$ folgt in ähnlicher Weise.

Von Aufgaben dieser Art, wo die Seiten eines Rechteckes mit bekannter Fläche eine (oft ziemlich komplizierte) »Gleichung« ersten Grades befriedigen, gibt es in den sogenannten »Serientexten« hunderte[24]. Sie macht damit die am besten repräsentierte »algebraische« Aufgabengattung aus. Die wenigen hier vorgeführten Aufgaben sind damit für die Haupttypen babylonischer »Algebraaufgaben« zweiten Grades ziemlich

---

[23] In MKT I, 346f publiziert.

[24] Die Länge ist dann immer 30 und die Breite 20, wie in der oben erklärten Gleichung $x+y-{}^{1}/_{4}y=45$. Die einzelnen Probleme sind sehr systematisch aufgestellt, und zwar nach einem mehrdimensionalen Schema. So werden im Tafel YBC 4668, Nr. C 38 bis C 53, aus der »Gleichung« $\alpha+{}^{1}/_{19}(\alpha-\beta)=A$ durch systematischen und unabhängigen Austausch des Zählers mit 2, des ersten + mit −, des ersten α mit β und des Nenners mit 7 insgesamt $2^4=16$ verschiedene »Gleichungen« hervorgebracht (siehe MKT I, p. 462). α ist hier $x\cdot{}^{x}/_{y}$, β ist $y\cdot{}^{y}/_{x}$ (x steht wie schon vorher für die »Länge« und y für die »Breite« eines Rechteckes). Die andere »Gleichung« ist $x\cdot y=1,0$, weshalb auch $\alpha\cdot\beta=10,0$; das Gesamtsystem ist also genau von der eben diskutierten Art und nur formell vom sechsten Grad (aus α und β sind x und y leicht zu finden, da ${}^{\alpha}/_{\beta}=({}^{x}/_{y})^3$).



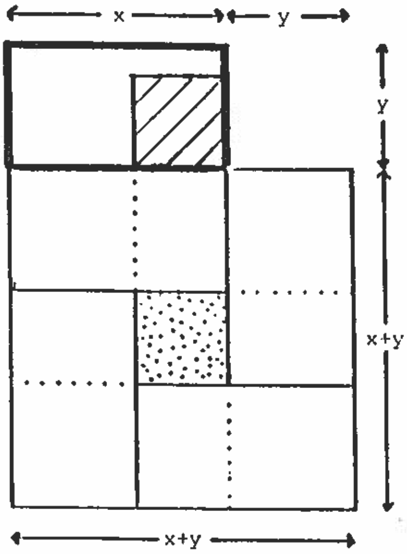
FIGUR 6A. Die geometrische Repräsentation der Aufgabe YBC 6504 Nr. 1. Oben das amputierte Rechteck; unten die Zerschneidung, Gnomon-Umlegung und quadratische Ergänzung des Rechteckes.

repräsentativ[25]. Man soll jedoch wissen, daß es sehr viele Aufgaben gibt, die außerhalb der Haupttypen fallen und recht kompliziert sein können. Oft werden dann für die Lösung Richtwege benutzt, die man bei der Verwendung von symbolischer Algebra kaum entdecken würde, die aber für die ursprüngliche naiv-geometrische Methode einleuchtend sind. In diesen Fällen unterscheidet sich dann die babylonische Lösung—zu ihrem Vorteil—vom modernen Standardverfahren.

Schlagende Beispiele dafür finden wir in den ersten drei Aufgaben des Textes YBC 6504[26], während die vierte Aufgabe die Gefahr der naiven Verfahren zeigt. Alle vier Aufgaben handeln von einem Rechteck $x \cdot y$, wo $x \cdot y-(x-y)^2=8,20$. Außerdem ist gegeben, daß $x-y=10$ (Aufgabe 1), $x+y=50$ (Aufgabe 2), $x=30$ (Aufgabe 3), und $y=20$ (Aufgabe 4). Die Reduktionsverfahren

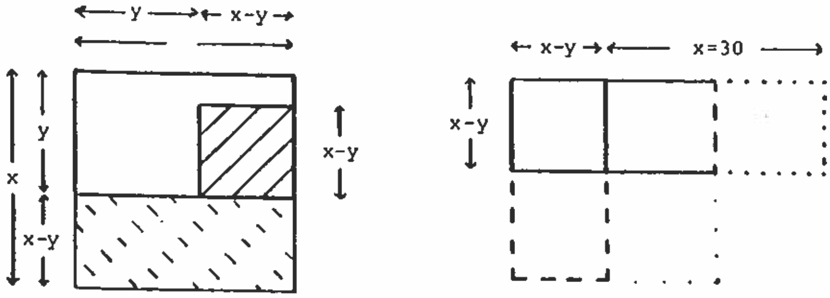
[25] Nur fehlt der Aufgabentypus, wo nach Reduktion außer der Fläche eines Rechtecks auch die *Summe* von Länge und Breite gegeben ist. Im Fall, wo es sich um eine Aufgabe mit zwei Unbekannten handelt, bringt sie uns nichts besonderes. In den wenigen Fällen, wo *eine* unbekannte Größe gesucht wird und wo es also im Prinzip eine Doppellösung geben kann, finden die Babylonier nur die eine. Das könnte uns wundern, wenn wir nicht wüßten, daß die Lösung immer von vornherein bekannt ist; die geometrische Analyse wird dann natürlich immer diejenige der zwei Zerschneidungen des Rechtecks benutzen, die mit der bekannten Lösung übereinstimmt.

[26] Publiziert in MKT III, 22f; in meinem [1985: 41ff] diskutiert. Der Text ist u.a. durch seine Systematik mit den Serientexten verwandt, gibt aber zum Unterschied von diesen die Lösungsverfahren an.



FIGUR 6B. Die geometrische Repräsentation der Lösung von YBC 6504 Nr. 2. Oben in kräftiger Abgrenzung das amputierte Rechteck, unten das Quadrat auf der Summe von Länge und Breite (die zwei Teile der Figur sind nur zufälligerweise hier zusammenstoßend gezeichnet).

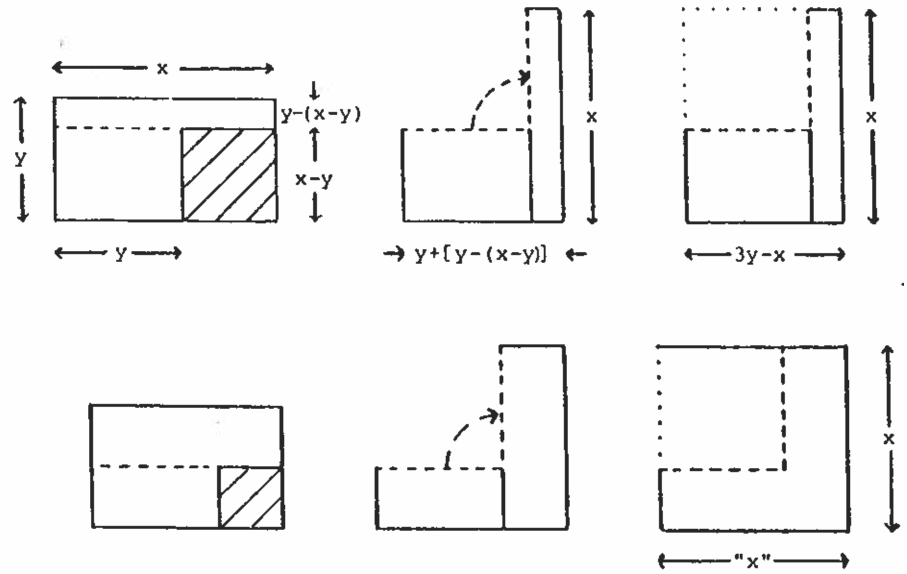
werden in Figur 6 A–D skizziert. In Aufgabe 1 ist ja die Seite des herausgerissenen Quadrates bekannt; seine Fläche ist dann leicht berechenbar, und Seitensumme und Fläche des Rechteckes sind also bekannt. Damit sind wir zurück in der Standardaufgabe $x-y=A$, $x\cdot y=B$. In Aufgabe 2 wird die Summe von Länge und Breite als Seite eines Quadrates genommen. Die Fläche dieses Quadrates ist gleich viermal das Rechteck plus das herausgerissene $(x-y)^2$. Wird es zu dem *8,20* addiert, ist die Summe also fünfmal die Fläche des Rechteckes. Nochmals



FIGUR 6C. Die geometrische Repräsentation der Lösung von YBC 6504 Nr. 3. Links wie die Figursubtraktion das Quadrat auf x–y *und ein Rechteck mit Breite* x–y *und Länge* 30 *zurückläßt. rechts die Gnomon-Umlegung und die Ergänzung.*

werden wir zu einer Standardaufgabe zurückgebracht, nämlich zu $x+y=A$, $x \cdot y=B$. In Aufgabe 3 wird das Quadrat $x \cdot x$ konstruiert und das amputierte Rechteck herausgerissen. Zurück bleibt dann das Quadrat auf $x-y$ und ein Rechteck mit der Breite $x-y$ und der Länge $[x=]30$. Das wird wie die Standardaufgabe $z^2+Az=B$ gelöst, mit $z=x-y$. In symbolischer Übersetzung sieht das wie ein eleganter, aber schwerlich durchschaubarer Variablenaustausch aus. Geometrisch kann natürlich die Strecke $x-y$ genauso gut wie die Strecke y gefunden werden; von Austausch ist kaum zu reden.

In Aufgabe 4 wird aber ein anscheinend geometrisch begründeter Fehlschluß gemacht. Weil in diesem konkreten Fall $x-y=y-(x-y)$, kann das amputierte Rechteck in einen Gnomon umgelegt werden, wo das fehlende Quadrat die bekannte Seite y und deshalb auch eine bekannte Fläche besitzt. Der Text glaubt, daß die Ergänzung ein Quadrat der Seite x ergibt. Eine symbolische Durchrechnung (oder eine weniger visuell-naive geometrische Betrachtung) zeigt, daß tatsächlich ein Rechteck mit den Seiten x und $3y-x$ hervorgebracht wird.



FIGUR 6D. Die geometrische Repräsentation der fehlerhaften Lösung von YBC 6504 Nr. 4. Oben in verzerrten Proportionen, wo der Fehler deutlich wird, unten in den korrekten Proportionen, wo alles plausibel aussieht.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die babylonischen Methoden im allgemeinen *nicht* besser sind als die ja unendlich flexibleren modernen symbolischen Verfahren—der scheinbare Vorzug des naiv-geometrischen Verfahrens in der zweiten und dritten Aufgabe der Tafel beruht einfach darauf, daß die Babylonier ihre Probleme nach der besonderen Leistungsfähigkeit ihrer vorhandenen Methoden auswählten.

Das sieht man mit außerordentlicher Klarheit in Fällen, wo ein nichtgeneralisierbares Verfahren verwendet wird—z.B. in der Behandlung von Problemen dritten Grades. Wenn diese nicht homogen sind und sich nicht auf Probleme ersten oder zweiten Grades reduzieren lassen, werden sie durch zufällig mögliche Faktorisierungen oder Übereinstimmung mit einem der verstreuten Tabellenwerte der Tabelle n^3+n^2 gelöst (vgl. auch das in Anm. 24 erwähnte Problem sechsten Grades). Wie Thureau-Dangin[27] sagt, muß man »admirer l'ingéniosité [...] mis en oeuvre«, aber auch erkennen, daß dadurch schließlich »les mathématiciens babyloniens avouent [...] leur impuissance à résoudre l'équation du troisième degré«. Endlich kann man bemerken, daß sie anscheinend keinen wesentlichen Unterschied gesehen haben zwischen einer eigentlich mathematischen Methode und einem bloßen Trick[28] und also *überhaupt keine Mathematiker im griechischen oder modernen Sinn sind*. Babylonische »Algebra« zweiten und höheren Grades ist eigentlich nicht als »reine Mathematik«, sondern eher als »reines, unangewandtes Berechnen« zu charakterisieren.

Als »algebraisch« kann man sie aber mit gutem Recht verstehen. Sie teilt viele der besonderen Merkmale moderner *praktisch verwendeter* Gleichungsalgebra trotz ihrer naiv-geometrischen Methode. Erstens ist sie ja *analytisch*. Zweitens ist ihre Identifikation von Größe und Meßzahl genau parallel zu jener Art mathematischer Modellierung, die die Grundlage für alle Beschreibung realer Zusammenhänge in Gleichungen ist—vgl. z.B. das Hookesche Gesetz $d=k \cdot B$, wo d als meßbare Dehnung, B als meßbare Belastung und k als meßbare Materialkonstante verstanden werden, die Gleichung aber unter der Vorausssetzung gelöst wird, daß sie sämtlich arithmetisch ver-

---

[27] TMB, p. xxxviii.

[28] Diese Einstellung ist nicht den Babyloniern vorbehalten. Sie folgt der ganzen subwissenschaftlichen Algebratradition bis ins 15. (nachchristliche) Jahrhundert, wo »the rules given [by Piero della Francesca, abacus master and painter] for solving equations of the third, fourth and fifth degree are valid only for special cases of these equations. The rule for solving the equation of the sixth degree is altogether false« (Jayawardene 1976:243).

knüpfte *Zahlen* sind. Drittens, endlich, werden die "Entgegengestellten«, »Längen« und »Breiten« im allgemeinen nicht um ihrer selbst willen gefunden (obwohl das natürlich der Fall ist in der Einübung von Standardmethoden); sie stehen als *Repräsentanten* für andere Größen, deren gegenseitige Zusammenhänge mit denjenigen der repräsentierenden geometrischen Größen isomorph sind—seien es Zahlen mit bekannten Produkt und Differenz[29], seien es Kauf- und Verkaufspreise von Feinöl[30], seien es wie in der obigen Landvermessungsaufgabe »falsche« Längen, Breiten und Flächen, seien es endlich wie im erwähnten Serientext die mit ihrem Verhältnis zum Partner multiplizierten Längen und Breiten eines Rechteckes. Wer die äquivoken Gänsefüßchen nicht mag, kann ruhig von altbabylonischer *Protoalgebra* statt von babylonischer »Algebra« reden.

---

[29] YBC 6967 (MCT, 129) und die oben erwähnte Tafel VAT 8520 (MKT I, 346f).

[30] Der Susatext TMS XIII (Bruins & Rutten 1961: 82, vgl. Korrektionen in Gundlach & von Soden 1963: 261).

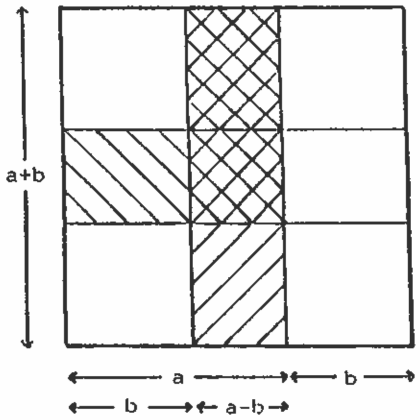
Gewöhnlicherweise sprechen die Mathematikgeschichten nicht von »altbabylonischer« sondern von »babylonischer« Mathematik/Algebra, keinen Unterschied machend zwischen der altbabylonischen und der nächsten mit mathematischen Texten gut belegten Periode, d.h. der seleukidischen (etwa 3. Jahrhundert v. Chr.). Solange die altbabylonische Protoalgebra ausschließlich arithmetisch gelesen und das strikte Auseinanderhalten der unterschiedlichen additiven bzw. multiplikativen Operationen nicht bemerkt wurden, waren die Verschiedenheiten der zwei Perioden auch nicht auffallend.

Die naiv-geometrische Deutung der altbabylonischen Texte wälzt das ganz um. Während die Operationen der frühen Texte konkrete (und meistens geometrische) Bedeutung hatten, gehen die Operationen der Spätzeit ausschließlich mit abstrakten Zahlen um. Es gibt nur *eine*, symmetrische Addition; die Subtraktion ist eine Abzählungsoperation»—in wievielen Schritten gehe ich von [der Zahl] *a* bis zur [Zahl] *b* hinauf«; und die einzige Multiplikation ist a-rà (vgl. oben, Anm. 14), die Multiplikation von Zahl mit Zahl (die übrigens auch als »multiples Gehen« aufzufassen ist).

Diese Arithmetisierung gilt auf der Ebene der mathematischen Operationen. Sie ist nicht in den »Einkleidungen« der Aufgaben zu sehen, die noch geometrisch sind (dadurch wird die seit der altbabylonischen Zeit stattgefundene Entwicklung noch mehr verschleiert). Sie gilt vielleicht auch nicht auf der Ebene der Methoden. Obwohl *wir* z.B. $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ als reine arithmetische Identität auffassen, können wir sie sehr wohl im elementaren Unterricht geometrisch vorführen—siehe Figur 7. Mehreres spricht dafür, daß die seleukidischen »Algebraiker« dasselbe gemacht haben: Erstens sind nämlich die schwierigeren ihrer Aufgaben auf geometrische Methoden zugeschnitten; zweitens ist das in ihren Texten gängige Umgehen mit mehreren Unbekannten sehr kompliziert, wenn man nicht entweder eine geometrische oder eine symbolische Repräsentation vor sich hat[31].

---

[31] Aus genau diesem Grund bemüht sich eine »rhetorische« Algebra auch immer, alle Unbekannten mittels Eliminierung durch eine Einzige zu ersetzen. Wenn bei Diophant die Summe von zwei Zahlen gleich *2A* und ihr Produkt gleich *B* ist, werden sie als *A plus arithmos* und *A minus arithmos* aufgefaßt; in derselben Situation würden die islamischen rhetorischen Algebraiker die eine Zahl als *ein Ding* (*šay*ʾ) auffassen, die andere als *2A minus ein Ding*.



FIGUR 7. Geometrischer Nachweis, daß das Band (a+b)·(a−b) *gleich dem Gnomon* a^2-b^2 *ist.*

Als Illustration können wir einen kurzen seleukidischen Text anschauen (BM 34568 Nr. 18[32]):

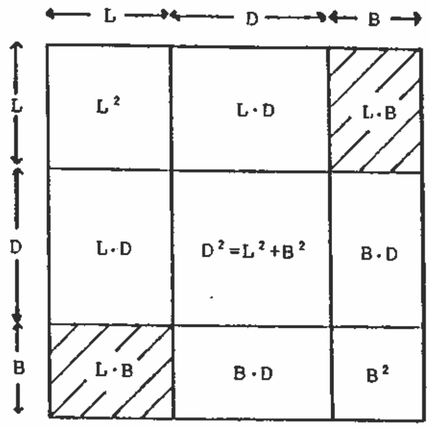
1. *Länge, Breite und Diagonale addiert ist 1,0. 5,0 die Fläche.*
2. *Länge, Breite und Diagonale mal Länge, Breite und Diagonale nimm.*
3. *Die Fläche mal 2 nimm, von ⟨dem Quadrat von Länge, Breite und Diagonale⟩ ziehst Du (es) ab.*
4. *Was übrig bleibt, mal ein Halb nimm. Länge, Breite und Diagonale mal ⟨was⟩ als Faktor sollst Du nehmen?*
5. *Die Diagonale ist der Faktor.*

In symbolischer Übersetzung wird das zu einer einfachen *Formel* statt (wie die altbabylonischen Lösungen) zur Beschreibung einer analytischen Prozedur. Ist L die Länge, B die Breite und D die Diagonale, haben wir

$$D = \tfrac{1}{2}\cdot\{(L+B+D)^2-2LB\}/(L+B+D)$$

Die Formel ist richtig und folgt aus $L^2+B^2=D^2$, sieht aber kaum einleuchtend aus. Daß sie mit rein rhetorischen Techniken abgeleitet worden sei, kommt unwahrscheinlich vor. Sie ist jedoch aus Figur 8 durch einfache Abzählung und durch Ausnützung des Pythagoreischen Theorems leicht ableitbar (wo übrigens zu bemerken ist, daß diese Figur als Generalisierung

[32] Publiziert in MKT III,16f; ich folge diesmal Neugebauers Übersetzung (*ibid.* p. 19) mitsamt seiner Korrektion eines Formulierungsfehlers. Das *(es)* in 3 habe ich der Verständlichkeit halber hinzugefügt.



FIGUR 8. Diagramm, aus dem hervorgeht, daß $(L+B+D)^2-2L\cdot B=2D\cdot(L+B+D)$, *wenn* $D^2=L^2+B^2$.

von Figur 7 betrachtet werden kann; daß letztere mit Einzeichnung von Diagonalen zum Pythagoreischen Theorem führt; und daß ihre Konstruktion schon aus altbabylonischen Texten hervorgeht, vgl. Figur 6 B).

Auf der Ebene der Methode war die seleukidische »Algebra« also vermutlich genauso geometrisch wie die altbabylonische. Während letztere aber konstruktiv und analytisch war, sehen (nicht nur in diesem Fall sondern allgemein) die seleukidischen Aufgabenlösungen wie Argumentationen auf schon gemachten Figuren aus. Sie sind also *nicht analytisch sondern eher synthetisch*. Die seleukidische »Algebra« ist damit, obwohl sie zweifellos von der altbabylonischen abgeleitet ist, mit viel weniger Recht als jene als *Protoalgebra* oder als *algebraisch in ihrer Denkweise* zu charakterisieren.

Daraus ist nicht zu schließen, daß die altbabylonische Protoalgebra als Sackgasse zu betrachten ist. Das wird in einem *Liber mensurationum* bezeugt, den Gherardo di Cremona im späten 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt hat und dessen verlorenes arabisches Original im frühen 9. Jahrhundert abgefaßt sein mag[33]. Die erste Hälfte des Traktats ist nicht nur eine Weiterführung der altbabylonischen Tradition, sondern dieser auch erstaunlich nahe. Erstens ist die »rhetorische Struktur« der Aufgaben dieselbe: Die Aufgabe ist in der ersten Person Perfekt formuliert (daß die Länge eines Rechteckes seine Breite mit soundsoviel überschreitet wird jedoch in Präsens erklärt—wie schon 3000 Jahre früher). Dann kommt der Hinweis auf das Verfahren des Schülers, und schließlich die Vorschriften im Imperativ oder in der 2. Person Präsens (vgl. die oben übersetzten altbabylonischen Aufgaben). Zitate aus der Aufgabenformulierung werden mit den Worten »Da er gesagt hat« begleitet—und selbst der Hinweis auf den Kopf/das Gedächtnis als Behälter für Resultate gewisser Art wird wiedergefunden.

Zweitens gibt es, obwohl die Figuren selbst in der Übersetzung verlorengegangen sind, ständige Hinweise auf Figuren als Begründung für die Richtigkeit der Lösungsverfahren. Drittens sind die Distinktionen zwischen mehreren additiven, mehreren subtraktiven und mehreren multiplikativen Operationen noch spürbar, wenn auch nicht im lateinischen Text völlig aufrechterhalten. Viertens endlich sind nicht nur wichtige altbabylonische Aufgabentypen, sondern auch (was wesentlicher ist) ihre charakteristischen Lösungsverfahren wiederzufinden.

Der *Liber* ist also viel näher an der altbabylonischen Quelle als die seleukidische Mathematik. Zurselben Zeit findet man im *Liber* Aufgaben, die auch in den seleukidischen Tafeln vorkommen—zum Beispiel die eben erwähnte. Versucht man, einen Stammbaum zu konstruieren, wird die direkte Linie daher von der altbabylonischen Protoalgebra zum *Liber* gehen mit einer kurzen Nebenlinie zu den seleukidischen Tafeln[34]. Die direkte

---

[33] Von Busard (1968) kritisch ediert. Die hypothetische Datierung, der Inhalt und die ganzen Implikationen davon werden in meinem [1986] ausführlich behandelt.

[34] Es scheint, daß die sehr wenigen Gleichungen zweiten Grades, die in der alexandrinischen Tradition (einschließlich der lateinischen Agrimensortradition) zu finden sind, auf diese Nebenlinie zurückzuführen sind. Das ist kaum verwunderlich, da die seleukidischen Tafeln vom hellenisierten Uruk herrühren und die seleukidische praktische Geometrie nicht altbabyloni-

Linie scheint von einer subwissenschaftlichen Tradition unter praktischen Geometern (Landmessern, Architekten, Baumeistern u.ä.) getragen worden zu sein. Die seleukidische Linie dagegen wurde, wie es aus Abschreiber- und Besitzerangaben auf den Tafeln deutlich hervorgeht, von den Priester-Gelehrten am astronomischen Zentrum in Uruk hervorgebracht, deren hochentwickelter arithmetischen Astronomie wir vielleicht die Arithmetisierung auch der »algebraischen« Operationen zu verdanken haben.

Für viele seiner Aufgaben gibt der *Liber* außer seiner Hauptmethode einen *modus secundum aliabram*, ein »Verfahren nach *al-jabr*«. Letztere Disziplin ist (etymologisch und genetisch) der Ursprung unserer Algebra und ist uns in seiner Form aus dem frühen 9. Jahrhundert von al-Khwārizmī bekannt. Sie war, bis al-Khwārizmī und andere wissenschaftliche Mathematiker sie bearbeiteten, eine subwissenschaftliche Praktikertradition, anscheinend von Buchhaltern und anderen Rechnern getragen[35]. Ihr *Ansatz* war daher algebraisch im problemlösenden, nicht im theoretischen oder strukturellen Sinn. So weit war sie also der altbabylonischen Protoalgebra (und dadurch auch der Hauptmethode des *Liber*) ähnlich. Ihre *Methode* war aber meistens rhetorische und nie naiv-geometrische Analyse (vgl. Note 31); nur für ihre Lösung der drei normalisierten gemischten »Gleichungen« zweiten Grades hatte sie weder rhetorische noch geometrische Begründungen, nur feste, unbegründete Standardalgoritmen.

Die Vorgeschichte der *al-jabr*-Tradition ist uns unbekannt. Man hat an indische Inspiration gedacht, weil eine hochentwickelte »synkopierte« Algebra[36] sich schon bei frühen indischen Autoren finden läßt. Leider ist sie so viel höher als die *al-jabr* entwickelt, daß eine Ableitung letzterer von der indischen *wissenschaftlichen* Mathematik kaum denkbar ist. Die frühen islamischen Algebraautoren geben uns keine Hinweise[37] und also auch keine Hinweise auf fremden Ursprung, während der indische Ursprung des dezimalen Stellenwertsystems erklärt

---

sche, sondern griechische/alexandrinische Methoden benutzen.

[35] Auch diese Behauptung baut auf die Analysen meines [1986].

[36] D.h. schematisch-stenographisch geschriebene rhetorische Algebra. Der Ausdruck geht (wie auch die »rhetorische Algebra«) auf Nesselmanns *Algebra der Griechen* (1842) zurück.

[37] Am nächsten kommt Thābit ibn Qurra in seiner *Verifizierung der Probleme der al-jabr durch geometrische Beweise*, wenn er von einer offensichtlich subwissenschaftlichen Gruppe von »Algebraleuten« spricht (ed., transl. Luckey 1941).

wird; es ist daher plausibel, daß sie die Tradition »zu Hause« gefunden haben, irgendwo zwischen Irak und Turkestan—oder vielleicht überall im ganzen Gebiet von Syrien bis Indien.

Auch die fernere Vorgeschichte der Disziplin ist unklar. Sie mag vielleicht die babylonische Protoalgebra unter ihre Stammmütter zählen—wie schon Gandz[38] bemerkt hat, könnte der Name vom babylonischen *gabrum* hergeleitet sein, ein Wort, das in der Tat in den babylonischen Texten eine Rolle spielt (obwohl eine andere, als die von Gandz vermutete). Wenn das der Fall ist, ist doch nicht viel von der babylonischen Inspiration unverändert geblieben—eigentlich nur die Vorliebe für wenig nutzbare »Gleichungen« zweiten Grades und das analytisch-heuristische Vorgehen.

Am besten nehmen wir also einfach die subwissenschaftliche *al-jabr*-Tradition zur Kenntnis, wie wir sie in den frühislamischen Quellen treffen. In dieser Form ist sie jedenfalls Hauptgrundlage für die schnelle Entwicklung einer wissenschaftlichen Algebra. Diese Entwicklung beginnt zu dem Zeitpunkt, wo al-Khwārizmī und sein Zeitgenosse ibn Turk Abhandlungen über die bisher ohne Bücher tradierte Disziplin verfassen[39] und in dieser Verbindung auch die naiv-geometrischen »Beweise« der altbabylonischen (und *Liber mensurationum*-) Tradition als Begründung für die Richtigkeit der bisher unbegründeten Standardalgorithmen der *al-jabr* benutzen. Damit beginnt ein neues Kapitel in der Geschichte der algebraischen Denkweisen, wo auch letztendlich vieles aus den unterhaltungsmathematischen Traditionen einbezogen bzw. überflüssig gemacht wird.

---

[38] Gandz 1926.

[39] Al-Khwārizmī's Werk wurde von F. Rosen (1831) herausgegeben und ins Englische übersetzt. Eine neue russische Übersetzung wurde von B. A. Rozenfeld in S. H. Siraždinov 1983 veröffentlicht. Das überlieferte Fragment von ibn Turks Werk wurde von A. Sayili (1962) veröffentlicht und übersetzt.

Im Anfang des Aufsatzes wurden ägyptische und babylonische Mathematik unter demselben Gesichtspunkt diskutiert, und dann wurde plötzlich alles babylonisch. Gibt es denn nichts in Verbindung mit dem alten Ägypten zu sagen?

Ja und nein. Höhere »Algebra« wie die babylonische gibt es in den ägyptischen Quellen nicht; Umkehraufgaben und elementare analytische Denkweisen gibt es. Alle Beispiele werden mit einer von zwei Varianten des »einfachen falschen Ansatzes« gelöst—entweder wird für die unbekannte Größe der Wert *1* genommen oder auch ein anderer, bequemer Wert, was dann am Ende der Berechnung eine weitere Proportionalitätsbetrachtung erfordert; und mit Ausnahme von einzelnen homogenen Problemen zweiten Grades sind alle Aufgaben von erstem Grad.

Beide Varianten des »einfachen falschen Ansatzes« kennen wir schon aus den altbabylonischen Texten und zwar aus der Aufgabe vom gebrochenen Meßrohr; es ist daher überflüßig, hier nochmals ihre Prinzipien durchzugehen. Nur ist zu bemerken, daß diese wenig technische Betrachtungsweise in der ägyptischen Mathematik bis in die christliche Ära sehr beliebt bleibt und daß sie auch im indischen und islamischen (und davon im lateinischen) Mittelalter verbreitet ist—als leichtere Alternative zur rhetorischen Algebra.

Alternative ist sie freilich nur für homogene Probleme. Für nichthomogene Probleme ersten Grades entwickelte sich jedoch aus ihr die sogenannte *regula falsis* oder »Regel des doppelten falschen Ansatzes«. Hier werden zwei Ansätze für die Unbekannte gemacht, der eine zu groß und der andere zu klein; der richtige Wert wird dann durch einen fixierten Algorithmus (dessen Prinzip eine lineare Interpolation ist) gefunden. Das ist an sich ganz unalgebraisch und somit ohne Interesse für eine Geschichte der algebraischen Denkweisen, ist aber illustrativ für einen Prozeß, der mehrmals in den subwissenschaftlichen Traditionen stattgefunden hat: Für die Lösung von Umkehrproblemen wird im Anfang eine heuristische, analytische Methode verwendet. Wenn sie vertraut und die erforderlichen Rechenschritte somit völlig bekannt geworden sind, wird sie automatisiert. Statt Analyse bleiben dann Algorithmen, und statt analytischer Denkweise bleibt gedankenloses Auswendiglernen von Regeln.

In den wissenschaftlichen Traditionen geschieht etwas ähnliches, aber trotzdem verschiedenes. Das haben wir vermutlich schon im seleukidischen Fall gesehen. Aus den altbabylonischen konstruktiven geometrischen Verfahren wurde anscheinend, als die für die Beweise erforderlichen Standardkonstruktionen bekannt genug waren, synthetische Argumentation auf schon vorhandenen Figuren. Ähnliches mag auch während einer griechischen Transformation des altbabylonischen Materials stattgefunden haben.

Diese Hypothese muß im Zusammenhang mit der alten Frage der »geometrischen Algebra« gesehen werden. Vor etwa hundert Jahre bemerkte Zeuthen, daß die Theorie der *Elemente* II als Theorie geometrisch ausgedrückter Lösung von Gleichungen zweiten Grades gelesen werden kann, und vermutete daher, daß sie auch so gelesen werden soll[40]; die Griechen hätten, um um die Probleme der Irrationalität herumzukommen, ihre Algebra in geometrischer Form, in eine »geometrische Algebra« übersetzt. Als dann um 1930 die »babylonische (vermutet arithmetische) Algebra« entdeckt wurde, war der Gedanke naheliegend, daß die »geometrische Algebra« eine geometrische Übersetzung einer übernommenen babylonischen Algebra sei.

Seit 20 Jahren ist diese These unter heftigem Angriff, und es ist wohl jetzt klar, daß die »geometrische Algebra« nicht als *eine Algebra* aufgefaßt werden darf—sie gehört in eine eigene und ganz andersartige theoretische Struktur. Sie ist kein Glied in irgendwelcher »Kunst des Auffindens« und also keine Übersetzung arithmetischer Analyse[41].

Das wird nicht an sich anders, wenn der geometrische Charakter der altbabylonischen (und daraus subwissenschaftlich fortgesetzten) Protoalgebra erkannt wird. Auf der anderen Seite sind die in *Elemente* II behandelten Figuren erstaunlich nahe verwandt mit denjenigen, deren Konstruktion in den altbabylonischen Texten beschrieben wird. Es ist dann mindestens eine naheliegende Möglichkeit, daß griechische Mathematiker im 6. oder 5. Jahrhundert angefangen haben, die Eigenschaften der aus den Nachbartraditionen bekannten Figuren theoretisch auszuforschen[42]—ganz wie sie in derselben Zeit angefangen haben, die Eigenschaften der auf dem Abakus in Rechensteinen

---

[40] Das geschah in Verbindung mit einer Untersuchung der Apollonischen Kegelschnittlehre, wo in der Tat die Theorie als äquivalenter Ersatz für analytische Geometrie fungiert (Zeuthen 1886: 5ff).

[41] Das wird nicht dadurch geändert, daß sie analytisch verwendet werden *kann*—wie z. B. in Apollonios' Kegelschnittlehre.

[42] Für diese Hypothese sprechen verschiedene Indizien, die ich in meinem [1985a] diskutiere—darunter eine Isomorphie zwischen dem babylonischen »Entgegengestellten« und dem griechischen geometrischen *dynamis*-Begriff und Andeutungen, daß schon zu Platons Zeit griechische Vorläufer für die von Diophant weiterentwickelte Algebra existierten. Solche Vorläufer wären vermutlich mit den nahöstlichen Algebratraditionen verbunden.

ausgelegten Zahlenmuster zu erforschen (die »Lehre vom Geraden und Ungeraden«)[43].

Aus der Erforschung der babylonischen Figuren und Figurtransformationen und der systematisch-theoretischen Weiterbearbeitung der daraus entstandenen Probleme könnte dann letztendlich die synthetische Theorie der *Elemente* II hervorgegangen sein. Auf halbem Weg im Prozeß fänden sich die *Data* Euklids. Ihre Propositionen beschäftigen sich nicht mit der Lösung generalisierter »Gleichungen«[44], sondern mit ihrer Lösbarkeit; jedenfalls können sie als *Theorie geometrisch generalisierter Gleichungen* betrachtet werden. Ihre Methode ist manchmal nicht analytisch, sondern synthetisch—aber trotzdem werden sie in den antiken metatheoretischen Kommentaren als analytisch betrachtet[45], als ob eine analytische, »gleichungslösende« Vorgeschichte noch an ihnen klebte.

---

[43] Siehe Lefevre 1981.

[44] In der Tat entsprechen, wenn wir von ihrer Identifikation von Größe und Meßzahl absehen, die babylonischen Gleichungen der ersten Definition der *Data:* »Der Größe nach gegeben heißen Flächen, Linien und Winkel, zu denen wir uns gleiche verschaffen können« (Übersetzung Thaer 1962: 5).

[45] Z.B. Pappos, *Collectio* VII—Hultsch 1876: 636[18]. Privates Gespräch mit C. M. Taisbak.

Bruins, E. M., & M. Rutten, 1961. *Textes mathématiques de Suse*. (Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV). Paris: Paul Geuthner, 1961.

Busard, H. L. L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le »Liber mensurationum« d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril-Juin 1968, 65-125.

Fowler, Harold North (ed., transl.), 1977. Plato, *Theaetetus, Sophist*. (Loeb Classical Library, 123). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press / London: Heinemann, 1977. 1st ed. 1921.

Gandz, Solomon, 1926. "The Origin of the Term »Algebra«". *American Mathematical Monthly* 33 (1926), 437-440.

Gundlach, Karl-Bernhard, & Wolfram von Soden, 1963. "Einige altbabylonische Texte zur Lösung »quadratischer Gleichungen«". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 26 (1963), 248-263.

Hultsch, Friedrich (ed., transl.), 1876. Pappi Alexandrini *Collectionis* quae supersunt. E libris manu scriptis edidit et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. I-III. Berlin: Weidmann, 1876, 1877, 1878.

Høyrup, Jens, 1982. "Investigations of an Early Sumerian Division Problem, c. 2500 B.C.". *Historia Mathematica* 9 (1982), 19-36.

Høyrup, Jens, 1985. *Babylonian Algebra from the View-Point of Geometrical Heuristics. An Investigation of Terminology, Methods, and Patterns of Thought.* Second, slightly Corrected Printing. Roskilde: Roskilde University Centre, Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science, 1985.

Høyrup, Jens, 1985a. "Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7". *Preprint*, Roskilde University Centre, Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science, March 11, 1985.

Høyrup, Jens, 1986. "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra". *Erdem* 5:2 (Ankara 1986), 445-484.

Høyrup, Jens, 1987. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række: *Preprints og Reprints* 1987 Nr. 2.

Jayawardene, S. A., 1976. "The »Trattato d'abaco« of Piero della Francesca", S. 229-243 *in* C. H. Clough (ed.), *Cultural Aspects of the Italian Renaissance*. Essays in Honour of Paul Oskar Kristeller. Manchester: Manchester University Press / New York: Zambelli, 1976.

Lefèvre, Wolfgang, 1981. "Rechenstein und Sprache«, S. 115-169 *in* Damerow & Lefèvre (eds), *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Stuttgart: Klett-Cotta, 1981.

Luckey, Paul, 1941. "Ṯâbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93 (1941), 93-114.

MCT: O. Neugebauer & A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts.* (American Oriental Series, vol. 29). New Haven, Connecticut: American Oriental Society, 1945.

MKT: O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte.* I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster bis dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937. Reprint Berlin etc.: Springer, 1973.

Nesselmann, G. H. F., 1842. *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra.* Nach den Quellen bearbeitet. Erster Theil, *Die Algebra der Griechen.* Berlin: G. Reimer, 1842.

Paton, W. R. (ed., transl.), 1979. *The Greek Anthology.* In Five Volumes. (Loeb Classical Library, N^{os} ?) Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press / London: Heinemann, 1979. 1st ed. 1918.

Powell, Marvin A., 1976. "The Antecedents of Old Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics". *Historia Mathematica* 3 (1976), 417-439.

Rosen, Frederic (ed., transl.), 1831. The *Algebra* of Muhammad ben Musa, Edited and Translated. London: The Oriental Translation Fund, 1831.

Rudolff, Christoff, 1540. *Künstliche rechnung mit der ziffer und mit den zalpfenningen, sampft der Wellischen Practica, und allerley forteyl auff die Regel de tri.* Unpaginiert. O. Ort, 1540. Erstdruck 1532.

Sayili, Aydin, 1962. *Abdülhamid ibn Türk'ün katişik denklemlerde mantikî zaruretler adli yazisi ve zamanin cebri (Logical Necessities in Mixed Equations by ᶜAbd al Ḥamîd ibn Turk and the Algebra of his Time).* (Publications of the Turkish Historical Society, Series VII, N° 41). Ankara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1962. Reprint 1985.

Siraždinov, C. X. (ed.), 1983. Muxammad ibn Musa al-Xorezmi *Matematičeskie* traktaty. Taškent: Izdatel'stvo »FAN« Uzbekskoj CCP, 1983.

Tanret, M., 1982. "Les tablettes »scolaires« découvertes à Tell ed-Dêr". *Akkadica* 27 (1982), 46-49.

Thaer, Clemens (ed.,transl.), 1962. Die *Data* von Euklid. Nach Menges Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben. Berlin etc.: Springer, 1962.

TMB: F. Thureau-Dangin, 1938. *Textes mathématiques babyloniens.* (Ex Oriente Lux, Deel 1). Leiden: Brill, 1938.

Ver Eecke, Paul (ed., transl.), 1933. Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique.* Oeuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes. Paris & Bruges: Desclée de Brouwer, 1933.

Zeuthen, Hieronimus Georg, 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* København: Höst und Sohn, 1886. Dänische Erstausgabe 1884.

ISSN 0902-901X